

SUPPLEMENTO  
AL VOLUME XI, SERIE X, DEL  
**NUOVO CIMENTO**  
A CURA DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

1959

1° Trimestre

N. 2

**Linear Vector Spaces with Indefinite Metric.**

L. K. PANDIT (\*)

*Seminar für theoretische Physik der Universität - Zürich*

(ricevuto il 3 Ottobre 1958)

CONTENTS. — **Introduction** — **Section I.** 1.  $n$ -dimensional vector space. 2. Linear, bilinear and quadratic forms. 3. The metric. 4. Orthogonal basis. 5. Linear operators. 6. Orthogonal representation. Matrix elements. 7. Basis transformation. 8. The eigenvalue problem and diagonalization. 9. Infinite-dimensional vector-spaces with indefinite metric. — **Section II.** 1. Particle equation of motion of the charged meson. 2. Quantization of the electromagnetic field. 3. Lee model.

**Introduction.**

The vector spaces which occur in physics, like the space of state vectors in quantum theory of fields and particles, have always, with a few recent exceptions, a positive definite metric defined in them. That the introduction of an indefinite metric might be of interest in physics, was first contemplated by DIRAC (1943) (see also PAULI (1943) <sup>(1)</sup>). HEITLER <sup>(2)</sup> (1943) pointed out that the Kemmer and Klein-Gordon equations, when written as a particle equation of motion for charged mesons according to SAKATA and TAKETANI <sup>(3)</sup> (1940), necessarily require an indefinite metric for the interpretation of the

(\*) Present address: Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

<sup>(1)</sup> P. A. M. DIRAC: *Comm. Dublin Inst. Adv. Studies*, A, no. 1 (1943); W. PAULI: *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 175 (1943).

<sup>(2)</sup> W. HEITLER: *Proc. Roy. Irish Acad.*, A **44**, no. 1 (1943).

<sup>(3)</sup> S. SAKATA and M. TAKETANI: *Sc. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Tokyo*, **38**, 1 (1940); *Proc. Mat. Phys. Soc. Japan*, **22**, 757 (1940).

charge degree of freedom. The most brilliant use of an indefinite metric was made by GUPTA and BLEULER <sup>(4)</sup> (1950) in their method of quantization of the electromagnetic field, thus removing a long standing formal difficulty from the usual quantization procedure. Very recently again, the subject of indefinite metric has received great impetus from the works of PAULI and KÄLLÉN <sup>(5)</sup> and of HEISENBERG <sup>(6)</sup>.

In view of these trends, it seems advisable to us to present an introductory mathematical account of the subject of vector spaces with an indefinite metric. Excepting for a few results and remarks, we do not make any claims to originality in this paper. Our efforts are more towards making this a useful review of a subject which is very little known to physicists and provides still a virgin field for mathematicians. In this connection, we would like to invite the attention of the reader to the interesting papers by NEVANLINNA <sup>(7)</sup>, which inaugurate this study in mathematics.

## SECTION I.

### 1. - $n$ -dimensional vector space.

We begin with a finite dimensional linear vector space  $V_n$ , over the field,  $F$ , of complex numbers. As usual, in  $V_n$  are defined a vector addition and a multiplication of a vector by a scalar (complex number). The vectors are

$$\psi, \varphi, \chi, \dots \in V_n,$$

and the multipliers are

$$a, b, c, \dots \in F.$$

Then we have:

(i) associative and commutative laws of addition:

$$\psi + (\varphi + \chi) = (\psi + \varphi) + \chi,$$

$$\psi + \varphi = \varphi + \psi;$$

<sup>(4)</sup> S. N. GUPTA: *Proc. Phys. Soc.*, **63**, 681 (1950); K. BLEULER: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 567 (1950); W. HEITLER: *Quantumtheory of radiation*, third ed. (Oxford 1954), p. 90.

<sup>(5)</sup> G. KÄLLÉN and W. PAULI: *Medelelsser Kgl. Danske*, **30**, no. 7 (1955).

<sup>(6)</sup> W. HEISENBERG: *Nucl. Phys.*, **4**, 532 (1957); and papers referred to therein.

<sup>(7)</sup> R. NEVANLINNA: *Ann. Ac. Sci. Fenn.*, **1**, 108, 113, 115 (1952); **163**, 222 (1954).



(ii) existence of a unique zero vector,  $0$ ,

$$\psi + 0 = \psi ;$$

(iii) associative and commutative laws of multiplication:

$$a(b\psi) = b(a\psi) ,$$

$$(a + b)\psi = a\psi + b\psi ,$$

$$a(\psi + \varphi) = a\psi + a\varphi ;$$

(iv) the unit multiplier:

$$1 \cdot \psi = \psi .$$

The assumption, that the space has dimension  $n$  means, that there are at most  $n$  linearly independent vectors in the space. Thus,  $n$  linearly independent vectors span the whole space; or, in other words, they form a complete basis for the space.

## 2. - Linear, bilinear and quadratic forms.

A complex-valued function,  $f(\psi) \in F$ , defined for all  $\psi \in V_n$ , is called linear, if

$$f(a\psi) = af(\psi) ; \quad f(\psi + \varphi) = f(\psi) + f(\varphi) .$$

A complex-valued function,  $Q(\psi, \varphi)$ , defined for all pairs of vectors  $\psi, \varphi$ , such that  $Q$  is linear in  $\varphi$  and  $\overline{Q}$  in  $\psi$  (where  $\overline{Q}$  is the complex conjugate of  $Q$ ) is called a bilinear form.

The bilinear form  $Q(\varphi, \psi)$  is called the form adjoint to  $Q(\psi, \varphi)$ . We are interested below in the so-called self-adjoint, or hermitian symmetric, bilinear forms for which

$$Q(\psi, \varphi) = \overline{Q(\varphi, \psi)} .$$

For such a form

$$Q(\psi) \equiv Q(\psi, \psi)$$

is called the corresponding hermitian (or quadratic) form.

A quadratic form  $Q(\psi)$  is called *definite*, when

$$Q(\psi) = 0 , \quad \text{only for } \psi = 0 .$$

Such a form has always a fixed sign (positive or negative definite form). It is called *semidefinite*, if  $Q(\psi)$  has a fixed sign and

$$Q(\psi) = 0, \quad \text{also for a } \psi \neq 0.$$

The form is said to be *indefinite* if

$$Q(\psi) \geq 0; \quad = 0 \quad \text{also for a } \psi \neq 0.$$

The form  $Q$  is *degenerate*, if there exists a  $\psi \neq 0$  such that

$$Q(\varphi, \psi) = 0, \quad \text{for all } \varphi \in V_n.$$

$\psi$  is then called a *degenerate vector*. All the degenerate vectors  $\psi$ , along with the vector  $\psi = 0$  build a linear manifold (subspace) in  $V_n$  (called the degenerate manifold or subspace).

### 3. - The metric.

So far there has been no concept of length in our vector space. We now bring this in by the introduction of a metric in  $V_n$  by means of a given hermitian symmetric bilinear form  $Q(\psi, \varphi)$ . The length of the vector  $\psi$  is then defined as the « norm »:

$$\|\psi\| \equiv Q(\psi).$$

$\psi$  is called a *positive*-, a *negative*- or a *null-vector* according as

$$\|\psi\| >, <, = 0.$$

In the usual finite dimensional vector spaces, the form,  $Q$ , which defines the metric is explicitly taken to be a positive definite form and then, of course, every vector has a positive norm, excepting the zero vector which has norm zero. But here, we are interested in the much more general case of an indefinite metric so that our  $Q$  is an indefinite form.

$Q(\psi, \varphi)$  is, in the usual terminology, the scalar-product of the two vectors  $\psi$  and  $\varphi$ .  $\psi, \varphi$  are then said to be *orthogonal* to each other if

$$Q(\psi, \varphi) = 0.$$



#### 4. – Orthogonal basis.

Having introduced the metric, our next step is to determine an orthogonal basis for the space. We *assume* that the self-adjoint bilinear form  $Q$  which defines our metric be *non-degenerate*, i.e., there shall be no non-zero vector which is orthogonal to the whole space. Then the method of constructing a complete orthogonal basis from a linearly independent set of vectors spanning the whole space goes in the following well-known manner.

Let us choose a vector,  $\psi_1$ , so that  $Q(\psi_1, \psi_1) \neq 0$ , which is always possible since  $Q$  is not identically zero. Then the equation,  $Q(\psi_1, \varphi) = 0$ , in  $\varphi$ , determines a subspace  $V_{n-1}$  of the space  $V_n$ , which does not contain  $\psi_1$ . Then we choose in this subspace,  $V_{n-1}$ , a vector,  $\psi_2$ , such that  $Q(\psi_2, \psi_2) \neq 0$ ; then, the equations

$$Q(\psi_1, \varphi) = 0,$$

$$Q(\psi_2, \varphi) = 0,$$

determine a subspace  $V_{n-2}$  of  $V_{n-1}$ , which does not contain  $\psi_2$ . In this way one proceeds to find an orthogonal set,  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , of vectors, the process never breaking in between since we have assumed  $Q$  to be non-degenerate. For the same reason, none of the  $n$  orthogonal vectors so chosen can have norm zero. Hence, by division of every vector,  $\psi_i$ , by  $|Q(\psi_i)|$ , we obtain a normalized orthogonal set such that

$$Q(\psi_i, \psi_k) = N_i \delta_{ik}, \quad \text{where } N_i = \pm 1, (N_i^2 = 1).$$

$N_i$ , being essentially  $Q(\psi_i, \psi_i)$ , are all real.

#### 5. – Linear operators.

An operator,  $P$ , has the property that it acts on a vector of the space to give again a vector, i.e.

$$\psi \in V_n,$$

$$P\psi \in V_n.$$

The operator is said to be a linear operator if it has the following property:

$$\text{if } \psi, \varphi \in V_n,$$

$$\text{then } P(a\psi + b\varphi) = aP\psi + bP\varphi,$$

where  $a, b$  are any multipliers in our field,  $F$ , of complex numbers.

The operator,  $P^*$ , *adjoint* to  $P$  is defined by

$$Q(\psi, P\varphi) = Q(P^*\psi, \varphi), \quad \text{for all } \varphi, \psi \in V_n.$$

$P^*$  is, of course, again a linear operator.

An operator,  $P$ , is called *self-adjoint*, if

$$P^* = P.$$

It is instructive at this stage to compare these definitions with the case when the metric is the usual positive-definite one. We would like to emphasize that in the physical literature, whenever an indefinite metric has been introduced, there has always been, to begin with, a positive definite metric in the space and only at a later stage is the indefinite metric introduced to circumvent the particular difficulty at hand. Let us represent by the symbol  $(\psi, \varphi)$  the positive definite hermitian symmetric bilinear form, which defines the usual positive definite metric in the space  $V_n$ . The adjoint to an operator,  $P$ , with respect to this metric, is the usual hermitian conjugate,  $P^\dagger$ , defined by

$$(\psi, P\varphi) = (P^\dagger\psi, \varphi).$$

The operator,  $P$ , self-adjoint with respect to this metric, is, as usual, called a hermitian operator, with the property

$$P^\dagger = P.$$

Now, according to a well-known theorem of linear algebra, we can express any other bilinear form  $Q(\psi, \varphi)$  in terms of the definite form  $(\psi, \varphi)$  by means of a linear operator  $\eta$  thus:

$$Q(\psi, \varphi) = (\psi, \eta\varphi).$$

If  $Q$  is a hermitian symmetric bilinear form, it follows that  $\eta$  is a hermitian operator (with respect to the definite metric  $(\psi, \varphi)$ ):

$$\eta^\dagger = \eta.$$

In the physical literature one finds the indefinite metric introduced by means of the form

$$(\psi, \eta\varphi), \quad \eta^\dagger = \eta,$$



the existence of the positive definite metric  $(\psi, \varphi)$  being always assumed.

With respect to the  $Q$ -metric,  $(Q(\psi, \varphi))$ , we defined the adjoint  $P^*$ . If we write, as above,

$$Q(\psi, \varphi) = (\psi, \eta\varphi), \quad \eta^\dagger = \eta,$$

then we see that

$$\begin{aligned} Q(P^*\psi, \varphi) &= Q(\psi, P\varphi) \\ &= (\psi, \eta P\varphi) \\ &= (\psi, \eta P\eta^{-1}\eta\varphi) \\ &= ((\eta P\eta^{-1})^\dagger\psi, \eta\varphi) \\ &= Q((\eta P\eta^{-1})^\dagger\psi, \varphi), \end{aligned}$$

i.e.,

$$P^* = \eta^{-1}P^\dagger\eta.$$

This is how the new adjoint is defined in the physical literature when an indefinite metric is introduced.

We prefer in the following not to mix up two different metrics so that we simply work with our  $Q(\psi, \varphi)$ -form right from the start as defining the metric.

## 6. - Orthogonal representation. Matrix elements.

We have already seen how an orthogonal basis  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  with

$$Q(\psi_i, \psi_k) = N_i\delta_{ik}, \quad N_i^2 = 1,$$

could be constructed. Having done this we may express any vector,  $\varphi$ , in terms of these basic vectors:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n c_i\psi_i,$$

where, as follows from the above ortho-normality relation of the  $\psi_i$ ,

$$c_i = N_i Q(\psi_i, \varphi).$$

Thus

$$\varphi = \sum_i N_i Q(\psi_i, \varphi)\psi_i.$$

The expansion coefficients,  $c_i$ , uniquely determine the vector  $\varphi$  ( $Q$  being

non-degenerate) and may be viewed as the elements of a column matrix representing the vector  $\varphi$ .

Again in the usual manner, we may represent any linear operator,  $P$ , by a square matrix whose elements are the expansion coefficients of the vectors  $P\psi_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Thus

$$P_{ik} = N_i Q(\psi_i, P\psi_k).$$

With this definition of matrix elements, the usual rule of matrix multiplication holds:

$$(PR)_{nm} = N_n Q(\psi_n, PR\psi_m) = \sum_i N_n Q(\psi_n, P\psi_i) N_i Q(\psi_i, R\psi_m),$$

where we use the expansion,  $R\psi_m = \sum_i \psi_i N_i Q(\psi_i, R\psi_m)$ , which expresses the completeness of the basis.

Thus

$$(PR)_{nm} = \sum_i P_{ni} R_{im}.$$

Notice the symmetry in the matrix representing a self-adjoint operator:

$$\text{if } P^* = P,$$

then

$$\begin{aligned} P_{nm} &= N_n Q(\psi_n, P\psi_m), \\ &= N_n \overline{Q(P\psi_m, \psi_n)}, \\ &= N_n \overline{Q(\psi_m, P^*\psi_n)}, \\ &= N_n \overline{Q(\psi_m, P\psi_n)}, \\ &= N_n N_m \{ N_m \overline{Q(\psi_m, P\psi_n)} \}, \quad N_m^2 = 1. \end{aligned}$$

Thus

$$P_{nm} = N_n N_m \overline{P_{mn}}.$$

It differs from the usual hermitian matrix due to the presence of  $N_n$  and  $N_m$ . The diagonal elements are, of course, real here also.

The presence of the  $N_i$  should be noted in forming the matrix representation.



# 7. - Basis transformation.

We study now the transformation of the space  $V_n$  into itself by means of a non-singular operator  $S$ :

$$\psi' = S\psi ,$$

and the inverse

$$\psi = S^{-1}\psi' .$$

Under this transformation (non-singular and therefore possessing an inverse) a set of linearly independent vectors remains linearly independent. Further, an operator equation such as

$$P\psi = \varphi ,$$

becomes

$$P'\psi' = \varphi' ,$$

i.e.,

$$P'S\psi = S\varphi ,$$

i.e.,

$$P = S^{-1}P'S ,$$

or

$$P' = SP S^{-1} .$$

This is the wellknown similarity transformation.

The most important transformations for us are the ones which leave the metric invariant, i.e., the ones which take us from one ortho-normal basis to another ortho-normal basis, leaving the norms of all vectors invariant. For these we have, identically in  $\psi$  and  $\varphi$ ,

$$\begin{aligned} Q(\psi, \varphi) &= Q(\psi', \varphi') \\ &= Q(S\psi, S\varphi) \\ &= Q(\psi, S^*S\varphi) , \end{aligned}$$

i.e.,

$$S^*S = 1 .$$

In the literature, such transformations are called *pseudo-unitary* transformations, the name *unitary* being reserved for the transformations which preserve the usual positive definite metric. We shall follow this terminology, although it is more logical to call these also unitary, unitarity being with respect to the metric  $Q$ . (The concept of unitarity cannot be defined without specifying the metric.)

Thus under the pseudo-unitary transformation,  $S$ , our old basic vectors,  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , go to another orthonormal set,  $\psi'_1 (= S\psi_1), \dots, \psi'_n (= S\psi_n)$ , with

$$Q(\psi'_i, \psi'_k) = N_i \delta_{ik}, \quad N_i^2 = 1,$$

the  $N_i$  being the same as before. In other words, each  $\psi_i$  transforms under a pseudounitary transformation into a  $\psi'_i$  so that the norm of  $\psi'_i$  is the same as the norm of  $\psi_i$ . The matrix elements of this transformation operator are, with respect to the old basis,

$$S_{nm} = N_n Q(\psi_n, S\psi_m) = N_n Q(\psi_n, \psi'_m).$$

The pseudo-unitarity condition  $S^*S = 1$ , written in the matrix form reads:

$$\sum_k S_{ik}^* S_{kj} = \delta_{ij}.$$

## 8. - The eigenvalue problem and diagonalization.

For quantum mechanics, the most important operator is the hermitian operator, since it has real eigenvalues and enough eigenvectors to form a basis for the whole space; and with respect to this basis, the operator is represented by a diagonal matrix whose diagonal elements are the eigenvalues of the operator. The statistical interpretation in quantum mechanics is possible only because of this property of hermitian operators, the latter being used to represent the so-called « observables ».

The metric in our space here being indefinite, we have now the self-adjoint operators instead of the analogous hermitian operators. In the following we study a self-adjoint operator to see how far it enjoys the properties of a hermitian operator. In particular, we shall study the eigenvalue problem of a self-adjoint operator and the possibility of diagonalizing its matrix. It will be seen that the general property of diagonalizability of the matrix of a hermitian operator does not always hold here.

Consider the operator,  $P$ , for which

$$P^* = P.$$

From this property of self-adjointness, it follows that  $Q(\psi, P\psi)$  is real. In the terminology of quantum mechanics, this quantity may be called the expectation value of  $P$  in a state represented by the vector  $\psi$ .



The eigenvalue problem consists in finding the non-trivial (*i.e.*,  $\varphi \neq 0$ ) linearly independent solutions of the equation

$$P\varphi = p\varphi, \quad p \text{ scalar.}$$

As a matrix equation, we may write it as follows:

$$\sum_j P_{ij}c_j = pc_i; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

where

$$P_{ij} = N_i Q(\psi_i, P\psi_j),$$

$$c_i = N_i Q(\psi_i, \varphi).$$

This is a set of  $n$  homogeneous equations in  $n$  unknowns,  $c_i$ , and the necessary and sufficient condition that it be solvable is that the determinant of the coefficient vanishes, *i.e.*,

$$|P_{ij} - p\delta_{ij}| = 0.$$

This being an  $n$ -th degree algebraic equation in  $p$ , has  $n$  roots, which need not be all different. For each of the distinct roots, the set of quantities,  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , determining uniquely the corresponding eigenvector  $\varphi$ , can be found. Of course, in the case when the number of distinct roots is less than  $n$ , it may happen that less than  $n$  linearly independent eigenvectors exist (in contrast to the case of a usual hermitian operator which has always  $n$  such eigenvectors). Thus, at least one and at most  $n$  linearly independent eigenvectors exist.

From the property of self-adjointness of  $P$ , we may derive the following results:

(i) If  $p$  is an eigenvalue with the eigenvector  $\varphi$  then

$$Q(\varphi, P\varphi) = Q(\varphi, p\varphi) = pQ(\varphi, \varphi).$$

Also,

$$Q(P\varphi, \varphi) = Q(p\varphi, \varphi) = \bar{p}Q(\varphi, \varphi).$$

But,

$$Q(P\varphi, \varphi) = Q(\varphi, P^*\varphi) = Q(\varphi, P\varphi).$$

Hence

$$pQ(\varphi, \varphi) = \bar{p}Q(\varphi, \varphi),$$

*i.e.*,

$$(p - \bar{p})Q(\varphi, \varphi) = 0.$$

Thus if

$$\bar{p} \neq p, \quad \text{then} \quad Q(\varphi, \varphi) = 0.$$

In other words, a self-adjoint operator may have *complex* eigenvalues but then the norm of the corresponding eigenvector is *necessarily* zero. The eigenvectors corresponding to real eigenvalues may or may not have norm zero.

(ii) If  $p_1$  and  $p_2$  are two eigenvalues, so that

$$P\varphi_1 = p_1\varphi_1, \quad P\varphi_2 = p_2\varphi_2;$$

then

$$Q(\varphi_1, P\varphi_2) = Q(\varphi_1, p_2\varphi_2) = p_2Q(\varphi_1, \varphi_2).$$

Also

$$Q(P\varphi_1, \varphi_2) = Q(p_1\varphi_1, \varphi_2) = \bar{p}_1Q(\varphi_1, \varphi_2).$$

But

$$Q(P\varphi_1, \varphi_2) = Q(\varphi_1, P^*\varphi_2) = Q(\varphi_1, P\varphi_2).$$

Hence

$$p_2Q(\varphi_1, \varphi_2) = \bar{p}_1Q(\varphi_1, \varphi_2),$$

i.e.,

$$(\bar{p}_1 - p_2) \cdot Q(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Thus if  $\bar{p}_1 \neq p_2$ , then  $Q(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ .

In other words, if the complex conjugate of one eigenvalue is not equal to the other eigenvalue, then the corresponding eigenvectors are necessarily orthogonal. In particular, the eigenvectors corresponding to two different real eigenvalues are orthogonal to each other.

The most important question which arises now, is as to how many linearly independent eigenvectors exist. This is directly connected with the problem of diagonalization of the matrix representing the operator by means of a general similarity transformation. It is clear, that the complete diagonalization is possible, if, and only if there are  $n$  linearly independent eigenvectors so that they span the whole space  $V_n$ —the diagonal form being obtained in the representation where these eigenvectors form the basis.

This question is dealt with in an important theorem of linear algebra, which we shall now make use of. The theorem deals with what is called the *minimum polynomial*,  $m(\lambda)$ , of the operator,  $P$ .  $m(\lambda)$  is a polynomial in the parameter  $\lambda$  and by definition, it has the *least* possible degree ( $\leq n$ ) such that on substitution of  $\lambda$  by  $P$  the polynomial operator  $m(P)$  vanishes identically:

$$m(P) = 0.$$

The theorem states, that the necessary and sufficient condition, that  $P$  can be «diagonalized» by a similarity transformation, is that  $m(\lambda)$  reduces into distinct linear factors over the field  $F$ ,

$$i.e., \quad m(\lambda) = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \dots (\lambda - p_k),$$



where  $p_i \neq p_j$  (for  $j \neq i$ ), ( $i, j = 1, 2, \dots, k \leq n$ ). The  $p_i$  are then the eigenvalues of  $P$ .

We do not wish to give a rigorous proof of this theorem as it can be found in most standard books on linear algebra. All the same, it is useful to visualize its plausibility in the following manner. Suppose the  $n$ -dimensional matrix of the operator  $P$  to have a completely diagonal form in which the diagonal elements are the eigenvalues  $p_i$ . Suppose that each eigenvalue  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k \leq n$ ) occurs  $\alpha_i$  times where  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$ .  $\alpha_i$  is the number of linearly independent eigenvectors which correspond to the eigenvalue  $p_i$ . Then obviously,  $(P - p_i I)$ , when acting on the  $\alpha_i$ -dimensional subspace,  $V^i$ , spanned by these  $\alpha_i$  eigenvector, gives zero. Since the whole space  $V_n$  is spanned by the eigenvectors of  $P$  (the diagonal form having been assumed), any vector  $\varphi$  of  $V_n$  may be decomposed into  $k$  components, each of which lies in a different one of the  $k$  different subspaces,  $V^i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Hence, the operator  $(P - p_1 I)(P - p_2 I) \dots (P - p_k I)$  gives zero when acting on  $\varphi$ ; and it is obviously the smallest power in  $P$  to have this property. Since  $\varphi$  is any arbitrary vector in  $V_n$ , we have

$$(P - p_1 I)(P - p_2 I) \dots (P - p_k I) = 0.$$

Thus the minimum polynomial of  $P$  is

$$m(\lambda) = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \dots (\lambda - p_k),$$

and it has distinct linear factors (simple roots). We could also have started with this form of the minimum polynomial and, by following the above arguments in reverse, showed the diagonalizability of  $P$ .

We shall now apply this theorem to the study of our self-adjoint operator ( $P^* = P$ ). Suppose  $p$  is a root of the minimum polynomial of  $P$ . Then the condition, that  $p$  be a *simple* root, is that the null-spaces of  $(P - pI)$  and  $(p - pI)^2$  be identical (by null-space,  $N[A]$ , of an operator  $A$ , we mean the space of all vectors  $\chi$ , such that  $A\chi = 0$ ). In other words, with

$$(a) \quad (P - pI)\varphi = \psi,$$

if

$$(b) \quad (P - pI)\psi = 0,$$

then it should follow that

$$\psi = 0'.$$

The hermitian operator in the usual theory (with definite metric) always satis-

fies this condition and is, therefore, always « diagonalizable ». This is not, in general, the case with our self-adjoint operator, as we shall now see. Suppose  $p$  is a real root of the minimum polynomial of  $P$ , ( $P^* = P$ ) then from (a), above, we have

$$P\varphi = p\varphi + \psi.$$

Thus

$$Q(\psi, P\varphi) = Q(\psi, p\varphi) + Q(\psi, \psi) = pQ(\psi, \varphi) + Q(\psi, \psi).$$

Assuming (b), above, we have

$$P\psi = p\psi,$$

so that

$$Q(\psi, P\varphi) = Q(P^*\psi, \varphi) = Q(P\psi, \varphi) = pQ(\psi, \varphi).$$

Hence

$$pQ(\psi, \varphi) = pQ(\psi, \varphi) + Q(\psi, \psi),$$

i.e.,

$$Q(\psi, \psi) = 0.$$

From this result it does not necessarily follow that  $\psi = 0$ , since the metric is indefinite. Thus it does not necessarily follow that the condition of diagonalizability holds. If  $\psi \neq 0$ , we have the case where  $\psi$  is an eigenvector corresponding to the real eigenvalue  $p$  and this eigenvector necessarily has norm zero, the operator  $P$  being then « non-diagonalizable ».

More generally, let

$$m(\lambda) = (\lambda - p)^k \cdot q(\lambda), \quad q(p) \neq 0, \quad p \text{ real.}$$

Then there exist vectors  $\varphi \neq 0$ , such that

$$(i) \quad (P - pI)^k \varphi = 0,$$

and

$$(ii) \quad (P - pI)^{k-1} \varphi = \chi \neq 0.$$

$\chi$  satisfies the eigenvalue equation

$$(P - pI)\chi = 0,$$

and

$$\begin{aligned}\|\chi\| &= Q(\chi, \chi) = Q((P - pI)^{k-1}\varphi, (P - pI)^{k-1}\varphi), \\ &= Q(\varphi, (P - pI)^{2k-2}\varphi), && \text{since } P^* = P \text{ and } p \text{ is real,} \\ &= 0, && \text{because of (i) for all } k > 1.\end{aligned}$$

Further, in this case, we can always give  $\chi (\neq 0)$  satisfying the equation

$$(P - pI)\chi = 0,$$

the representation

$$\chi = (P - pI)^{k-1}\varphi,$$

with a suitable  $\varphi$ , which shows that

$$\|\chi\| = 0.$$

For, if no such  $\varphi$  existed, then

$$\begin{aligned} & \chi \neq (P - pI)^{k-1}\varphi, && \text{for any } \varphi, \\ \text{i.e.,} & && \\ & (P - pI)\chi \neq (P - pI)^k\varphi, && \text{for any } \varphi, \\ \text{i.e.,} & && \\ & (P - pI)\chi \neq 0. && \end{aligned}$$

What we have seen above is that the mere property of self-adjointness is not enough to ensure diagonalizability of an operator. In particular a real eigenvalue of a self-adjoint operator may appear as a *non-simple* root of the minimum polynomial, in which case it does not have enough eigenvectors to span the whole space and then it *necessarily* follows that the norm of the eigenvectors corresponding to the particular eigenvalue in question is zero (\*).

To make the meaning of this statement more clear, let us take the simplest case of a 2-dimensional vector space with an indefinite metric. Then in this space a self-adjoint operator may very well have only one eigenvector (corresponding to a real eigenvalue), in which case this eigenvector necessarily has norm zero. An example of this is the case of the so-called dipole-ghost state in the Lee-model <sup>(8)</sup> studied by HEISENBERG <sup>(6)</sup>.

(\*) In such a case, we would have to add enough suitably chosen linearly independent vectors to these eigenvectors to obtain a set which would span the whole space. These would of course not form a fully orthogonal set, since the metric is *non-degenerate*. A vector with zero norm cannot be a part of a complete orthogonal set if the metric is non-degenerate.

<sup>(8)</sup> T. D. LEE: *Phys. Rev.*, **95**, 1329 (1954).



Since a self adjoint operator does not always have a *complete* set of eigenvectors, it cannot be used in the sense of the statistical interpretation of quantum mechanics as an observable. Extra conditions must be imposed on a self-adjoint operator if it is to have the important property of diagonalizability. What these conditions are, is a difficult question to which we have no general answer. We may mention here a particular case, which has been much used in physics, where both a positive definite metric,  $(\psi, \varphi)$ , and an indefinite metric,  $Q(\psi, \varphi)$ , are introduced. Then an operator,  $P$ , which is not only self-adjoint with respect to the indefinite metric,  $Q$ , but is also self-adjoint (*i.e.* hermitian) with respect to the positive definite metric, has, by virtue of the latter property, enough eigenvectors to be diagonalizable and its eigenvalues are all real. This, for example, is the case with the operator representing the number of scalar photons when the quantization of the electromagnetic field is performed according to GUPTA and BLEULER (<sup>4</sup>).

## 9. – Infinite-dimensional vector-spaces with indefinite metric.

As soon as the dimension of the vector space under consideration is not restricted to be finite, a great many complications arise. This is because it is absolutely necessary to introduce the concepts of continuity, convergence etc. This subject is very little developed so far. We shall be content here just to give briefly the preliminary results of NEVANLINNA (<sup>7</sup>), which deal with the possibility of giving a mathematically well defined orthogonal representation. NEVANLINNA shows that in the space  $V$  (dimension not limited to be finite) with the metric  $Q(\psi, \varphi)$ , if the form  $Q(\psi, \varphi)$  has a *positive definite* majorant form,  $H(\psi, \varphi)$ ,

$$|Q(\psi, \varphi)| \leq |H(\psi, \varphi)|,$$

such that the form  $H$  defines a positive definite Hilbert metric (\*) in the space  $V$ , then there exists a denumerable sequence of vectors  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  with the following properties:

(i) *Boundedness*: To understand this property consider that we have built out of the sequence  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  the sequence  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ , the elements of which are now orthonormal with respect to the metric,  $Q(\psi, \varphi)$ , *i.e.*,

$$Q(\psi_i, \psi_k) = N_i \delta_{ik}, \quad (N_i = \pm 1, 0);$$

(\*) For the definition and properties of Hilbert space, see, *e.g.* J. VON NEUMANN: *Mathematical foundations of quantum mechanics* (Princeton, 1955).

$N_i$  may also be zero, since we so far (in this sub-section) do not assume  $Q$  to be non-degenerate. Let  $L_n = L_n(\psi_1, \dots, \psi_n)$  be the subspace spanned by the non-null elements of the basis  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ . Let  $L_n^1$  be that subspace of  $L_n$  which is spanned by the positive vectors ( $N_i = +1$ ) and  $L_n^2$  that spanned by the negative vectors ( $N_i = -1$ ) of the basis. Then the projection,  $p_n(\varphi)$ , of any arbitrary vector,  $\varphi$ , on  $L_n^1 + L_n^2$  is equal to the sum,

$$p_n = p_n^1 + p_n^2,$$

of the projections of  $\varphi$  on  $L_n^1$  and  $L_n^2$  respectively.

Then the property of boundedness implies that the sequence of these projections remains *bounded* as  $n \rightarrow \infty$ .

Out of this property, it follows that the sum of the squares of the « expansion coefficients » of  $\varphi$ ,  $Q(\psi_n, \varphi)$ , converges absolutely.

(ii) *Completeness of the system  $\{\psi_n\}$* . This means the validity of the double inequality:

$$-Q_2(\varphi) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} Q(p_n^2) \leq Q(\varphi) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Q(p_n^1) \equiv Q_1(\varphi).$$

From this the Parseval equation,

$$Q(\varphi) = Q_1(\varphi) - Q_2(\varphi) = \sum_n N_n \cdot |Q(\varphi, \psi_n)|^2,$$

follows.

(iii) *Completeness of the metric  $Q$* . This means that the form,

$$P(\varphi, \psi) \equiv Q_1(\varphi, \psi) + Q_2(\varphi, \psi),$$

which is the *smallest* non-negative majorant form,

$$|Q(\varphi, \psi)| \leq |P(\varphi, \psi)|,$$

satisfies the Cauchy convergence criterium.

Under these three conditions one has the absolutely convergent representation:

$$Q(\varphi, \psi) = \sum_n N_n \overline{Q(\psi_n, \varphi)} \cdot Q(\psi_n, \psi).$$

Now putting,

$$\xi_n = N_n Q(\psi_n, \varphi),$$

we have the correspondence,

$$\varphi \rightarrow \xi,$$

between the vector  $\varphi$  and the Hilbert vector,

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots), \quad \left( \sum_n |\xi_n|^2 < \infty \right),$$

so that  $\varphi$  has the orthogonal representation,

$$\varphi = \sum_n \xi_n \psi_n,$$

which is convergent in the  $P$ -metric.

If we make the further *assumption* that the form  $Q$  is *non-degenerate*, then the above correspondence between  $\varphi$  and  $\xi$  is one-one,

$$i.e., \quad \varphi \leftrightarrow \xi.$$

When  $Q$  is degenerate, the Hilbert vector  $\xi$  determines the vector  $\varphi$  uniquely only if the latter is taken modulo the degenerate sub-space  $V^0$ .

## SECTION II.

In this section, we would like to discuss briefly a couple of well-known examples from physics, where use has been made of an indefinite metric, with a view to illustrating the foregoing results.

### 1. - Particle equation of motion of the charged meson.

Besides the interesting paper by HEITLER <sup>(2)</sup> on this subject, we would like to refer the reader to the excellent review article by FESHBACH and VILLARS <sup>(3)</sup> recently published. We shall follow the notation of the latter here.

Consider the Klein-Gordon equation describing charged scalar mesons in the presence of an external electromagnetic field with four-potential  $A_\mu$ :

$$\sum_{\mu=1}^4 [D_\mu^2 - \kappa^2] \psi = 0,$$

where

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu; \quad \mu = 1, 2, \dots, 4; \quad x_4 = ict; \quad A_4 = iV,$$

<sup>(3)</sup> H. FESHBACH and F. VILLARS: *Rev. Mod. Phys.*, **30**, 24 (1958).



and

$$\kappa = \frac{mc}{\hbar},$$

$m$  being the mass of the meson.

For a wave mechanical single-particle description we wish to find the wave function  $\Psi$ , which satisfies the equation:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi.$$

The Klein-Gordon equation may be rewritten in this form if we regard  $\partial\psi/\partial t$  and  $\psi$  as two independent components of a wave-function, which thus has an extra two-valued degree of freedom. If we write

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \chi), \\ \psi_1 &\equiv -\kappa^{-1}D_4\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - \chi),\end{aligned}$$

the Klein-Gordon equation reduces to the equation:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi,$$

where

$$\begin{aligned}\Psi &= \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \\ H &= (\tau_3 + i\tau_2) \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + mc^2\tau_3 + eV,\end{aligned}$$

with

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mathematically speaking,  $\Psi$  is, as far as the new degree of freedom is concerned, a vector of a 2-dimensional linear vector space in which a positive definite metric,  $(\Psi, \Phi)$ , is defined. With respect to this metric,  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  are hermitian operators. In the representation where the two basic vectors for this space are the eigenvectors of the hermitian operator  $\tau_3$  (with eigenvalues  $+1$  and  $-1$  respectively) the operators  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  are represented by the matrices given above and  $\Psi$  is represented by the column matrix,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Now the charge density is given, in the state  $\Psi$ , by

$$\varrho = \bar{\varphi}\varphi - \bar{\chi}\chi = (\Psi, \tau_3\Psi),$$

and the current-density by

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} [(\Psi, \tau_3(\tau_3 + i\tau_2)\nabla\Psi) - (\nabla\Psi, \tau_3(\tau_3 + i\tau_2)\Psi)] - \frac{e}{mc} \mathbf{A}(\Psi, \tau_3(\tau_3 + i\tau_2)\Psi).$$

The particular representation used here has the advantage that  $\varrho$  appears as the difference of two positive definite densities, which is as it should be if we are describing simultaneously particles with both signs of the charge. The normalization is now performed so that the charge is  $\pm 1$ ,

$$\int (\Psi, \tau_3\Psi) d^3x = \pm 1.$$

Thus, for the sake of a consistent physical interpretation of the particle equation describing both signs of charge simultaneously, we have to introduce the indefinite metric where the scalar product of vectors  $\Psi$  and  $\Phi$  is given by

$$\int (\Psi, \tau_3\Phi) d^3x; \quad \tau_3^2 = 1, \quad \tau_3^\dagger = \tau_3.$$

The expectation value of an operator,  $\Omega$ , in state  $\Psi$  is thus

$$\int (\Psi, \tau_3\Omega\Psi) d^3x.$$

In particular, we should notice that the Hamiltonian operator,  $H$ , is not hermitian at all but is self-adjoint with respect to the above indefinite metric, *i.e.*,

$$H^* \equiv \tau_3 H^\dagger \tau_3 = H.$$

$H$  is diagonalizable in the sense of Section I-8 (see reference <sup>(9)</sup>). On the other hand, as an example of a «non-diagonalizable» self-adjoint operator, consider the operator,

$$\tau_3 + i\tau_2.$$

This operator, which, when multiplied by  $\mathbf{p}/m$ , represents the velocity of the particle, is not hermitian, *i.e.*,

$$(\tau_3 + i\tau_2)^\dagger = \tau_3 - i\tau_2 \neq (\tau_3 + i\tau_2);$$

but it is self-adjoint with respect to the indefinite metric,

$$(\tau_3 + i\tau_2)^* \equiv \tau_3(\tau_3 + i\tau_2)^\dagger \tau_3 = (\tau_3 + i\tau_2).$$

But it does not have a complete set of eigen-states. It has only one eigenvalue, *i.e.*, zero, since

$$(\tau_3 + i\tau_2)^2 = 0,$$

and to it corresponds only one eigenvector, which (as we saw in Section I-8) must necessarily have norm zero. Thus velocity is not an « observable » in this theory.

On second quantisation,  $\Psi$  becomes a field operator and is no longer a state vector. The new state vectors, which describe the states of this quantized field, are vectors of a different vector space with the usual positive definite metric.

With these few remarks, which illustrate the results of Section I, we conclude with this example. More details on it are to be found in the papers of references (2) and (9).

## 2. - Quantization of the electromagnetic field.

Classically, the electromagnetic field is described by the four-potential,  $A_\mu = (A, iV)$ , in the Lorentz gauge, satisfying the wave equation

$$\square A_\mu = 0; \quad \mu = 1, 2, 3, 4;$$

and the Lorentz condition,

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

When this field is quantized according to GUPTA (4), the four  $A_\mu$  are considered as operators, all hermitian, (*i.e.* self-adjoint with respect to a positive definite metric  $(\psi, \varphi)$ ). But to maintain the reality property of the expectation value of  $A_4$ , which should be pure imaginary,  $A_4$  is taken to be anti-self-adjoint with respect to an indefinite metric

$$Q(\psi, \varphi) = (\psi, \eta\varphi), \quad \eta^\dagger = \eta,$$

which is then taken to be the fundamental metric for further interpretations. Thus

$$A_4^\dagger = A_4; \quad A_4^* \equiv \eta^{-1} A_4^\dagger \eta = -A_4;$$



*i.e.*,

$$\eta A_4 = -A_4 \eta .$$

Writing the Fourier expansion (cf. HEITLER (4))

$$A_\mu(x) = \sqrt{4\pi c^2} \sum_k \{ q_\mu^\dagger(k) \exp[-ik_\mu x_\mu] + q_\mu(k) \exp[ik_\mu x_\mu] \} ,$$

the above condition on  $A_4$  means that

$$\eta q_4 = -q_4 \eta .$$

The operator,  $N_4 = q_4^\dagger q_4$ , which represents the number of scalar photons in the field, is not only hermitian (in the metric  $(\psi, \varphi)$ ) but also self-adjoint (in the metric  $Q(\psi, \varphi)$ ). Hence, as shown in Section I-8, we have a complete set of eigenvectors for this operator,

$$N_4 \psi_{n_4} = n_4 \psi_{n_4} , \quad n_4 = 0, 1, 2, \dots$$

The metric operator,  $\eta$ , required by the above condition on  $q_4$ , is then easily found to be

$$\eta = (-1)^{N_4} .$$

Thus, assuming the  $\psi_{n_4}$  to be properly normalized,

$$(\psi_{n_4'}, \psi_{n_4''}) = \delta_{n_4' n_4''} ,$$

and

$$(\psi_{n_4'}, \eta \psi_{n_4''}) = (-1)^{n_4'} \delta_{n_4' n_4''} .$$

A general basic vector for the vector space describing the whole field is of the form

$$\prod_k \psi_{n_1}(k) \cdot \psi_{n_2}(k) \cdot \psi_{n_3}(k) \cdot \psi_{n_4}(k) ,$$

the above indefinite metric acting only in the partial space of the  $\psi_{n_4}(k)$ .

In this theory, the classical Lorentz condition is replaced on quantization by the condition that only certain state vectors,  $\Psi_L$ , are to be allowed, where  $\Psi_L$  are such that

$$L^{(-)} \Psi_L = 0 .$$

$L^{(-)}$  is the operator which represents the absorption part (*i.e.*, the positive frequency part) of the operator  $\partial A_\mu / \partial x_\mu$ . Now, since  $L^{(-)}$  is a linear operator,

all the allowed  $\Psi_L$  span a subspace,  $V_L$ , of the original vector space  $V$ . Dropping the indices  $n_1$  and  $n_2$  (transverse photons), we have for a particular radiation oscillator, the generating vectors of  $V_L$  given as

$$\Psi_{L_0}^{(0)} = \Psi(0, 0),$$

$$\Psi_r^{(1)} = \Psi(1, 0) + i\Psi(0, 1),$$

• • • • •

$$\Psi_L^{(n)} = \Psi(n, 0) + \dots + (i)^r \sqrt{\binom{n}{r}} \Psi(n-r, r) + \dots + i^n \Psi(0, n),$$

• • • • •

where  $\Psi(n_3, n_4)$  signifies the state with  $n_3$  longitudinal and  $n_4$  scalar photons. The interesting property of this set of vectors is that  $(1/\sqrt{2^n})\Psi_L^{(n)}$  form an ortho-normal set with respect to the positive definite metric,

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2^n}} \Psi_L^{(n)}, \quad \frac{1}{\sqrt{2^m}} \Psi_L^{(m)} \right) = \delta_{nm},$$

whereas, in the indefinite metric we have

$$(\Psi_L^{(0)}, \eta \Psi_L^{(0)}) = 1,$$

and

$$(\Psi_L^{(n)}, \eta \Psi_L^{(m)}) = 0, \quad \text{for } n \text{ or } m \neq 0$$

Thus, in the subspace,  $V_L$ , the  $\eta$ -metric is no longer indefinite, but positive semi-definite with  $\Psi_L^{(n)}$  ( $n \neq 0$ ) as the *degenerate* vectors of the subspace. It is for this reason that there is no difficulty of physical interpretation, after the above formulation of the Lorentz condition has been taken into account. Then a physical state is determined by  $\Psi_L^{(0)}$  or by  $\Psi_L^{(0)} + \sum c_n \Psi_L^{(n)}$ . The addition

of the admixture,  $\Psi'_L = \sum_{n \neq 0} c_n \Psi_L^{(n)}$ , does not affect the physical situation, it being

only equivalent to a gauge transformation of the  $A_\mu$  within the Lorentz gauges.

We note that in  $V_L$ , it is the definite metric and not the indefinite metric which is maintained, so that the above basis for  $V_L$  could be obtained as a part of the basis for the whole space, only under a unitary, but not under a pseudounitary transformation.

In this connection, we may also mention a basic difference which exists, in this formulation, between operators like  $A_\mu$ , which are not invariant under gauge transformations, and those like the field strengths, which are gauge

invariant. The former class of operators do not commute with the operator  $L^{(-)}$  and therefore do not transform a vector in the sub-space,  $V_L$ , into another one in the same sub-space. The gauge invariant operators, on the other hand, commute with  $L^{(-)}$  and thus they transform  $V_L$  into itself.

### 3. - Lee-model.

As a third example, we refer to the papers of KÄLLÉN and PAULI <sup>(5)</sup> and of HEISENBERG <sup>(6)</sup> on the Lee-model <sup>(8)</sup>. In this model, two fermions called V and N, and a boson, called  $\theta$ , interact so that only the following transitions are possible:

$$V \rightarrow N + \theta; \quad N + \theta \rightarrow V.$$

Therefore, the «bare» states of N and  $\theta$  are also the «physical» states. The physical state of V is, on the other hand, composed of the superposition of a bare V-state and a dissociated state (N,  $\theta$ ). The model admits of exact solutions, which are finite after a V-mass renormalization and a renormalization of the coupling constant,  $g$ .

However, the difficulty arises, that it is possible to achieve a finite real renormalized coupling constant, only if the un-renormalized coupling constant,  $g$ , is pure imaginary. Thus, the Hamiltonian one started with, cannot be hermitian any more. KÄLLÉN and PAULI show that this difficulty of the non-hermiticity of the Hamiltonian exists even when a cut-off is used for values of the renormalized coupling constant greater than a critical value, which depends on the cut-off. To circumvent this difficulty, these authors had to introduce an indefinite metric, whereby all bare states in which an odd number of V-particles exist have a norm  $-1$  and the others a norm  $+1$ . Let us denote by  $\Psi(n_V, n_N, n_\theta)$  a basic state-vector, the arguments,  $n_V, n_N, n_\theta$ , denoting the number of bare V, N,  $\theta$ -particles, respectively. Then in the old definite metric

$$(\Psi(n_V, n_N, n_\theta), \Psi(n'_V, n'_N, n'_\theta)) = \delta_{n_V n'_V} \cdot \delta_{n_N n'_N} \cdot \delta_{n_\theta n'_\theta}.$$

The new non-degenerate indefinite metric introduced is ( $\eta^\dagger = \eta$ ):

$$(\Psi(n_V, n_N, n_\theta), \eta \Psi(n'_V, n'_N, n'_\theta)) = (-1)^{n_V} \delta_{n_V n'_V} \delta_{n_N n'_N} \delta_{n_\theta n'_\theta}.$$

With respect to this metric, the Hamiltonian  $H$  is a self-adjoint operator.

Consider now the eigenvalue problem,

$$H\Psi = E\Psi,$$



with the boundary condition that we are considering only the physical situation in which a physical V or physical N and 0 exist. Besides the scattering states of (N, 0), there are also discrete (bound) states. The latter interest us for the present example. KÄLLÉN and PAULI find that two discrete states exist, describing the physical V-particle, one of which we shall denote by  $\Psi(V_1)$ , and the other, which we shall denote by  $\Psi(V_{-1})$ . They correspond to two different real eigenvalues,  $E_1$  and  $E_{-1}$  ( $E_{-1} < E_1$ ), of the self-adjoint operator  $H$ , such that with proper normalization

$$(\Psi(V_1), \eta\Psi(V_1)) = +1,$$

$$(\Psi(V_{-1}), \eta\Psi(V_{-1})) = -1.$$

The state  $\Psi(V_{-1})$ , having a negative norm, is the so-called «ghost-state».

HEISENBERG <sup>(6)</sup> has studied the limiting case, where, by a suitable variation of a constant involved,  $E_1$  and  $E_{-1}$  become equal, say to  $E_0$ . Explicit calculations show, that then  $\Psi(V_1)$  and  $\Psi(V_{-1})$  approach each other and become equal, say to a vector  $\Psi_0$ . Thus one does not have two eigenvectors, but only one belonging to the eigenvalue  $E_0$  (in contrast to the ordinary case of degeneracy in quantum mechanics where this can never happen). Here then we have an example, where in the 2-dimensional subspace of discrete states, the self-adjoint operator  $H$  has only one eigen-state,  $\Psi_0$ . It follows from our discussion in Section I-8, that the norm of this eigenvector is necessarily zero,

$$(\Psi_0, \eta\Psi_0) = 0.$$

This, in fact, is what HEISENBERG also finds from his explicit calculations. Now with  $\Psi_0$  and the scattering states, one has to have another independent vector to be able to complete the whole space of state-vectors. This vector is necessarily non-orthogonal to  $\Psi_0$ , since the metric is non-degenerate. The extra vector chosen by HEISENBERG is what is called a dipole ghost-state,  $\Psi_{\text{Dip}}$ . It is given by

$$\Psi_{\text{Dip}} \equiv \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\Psi}{\Delta E} \right),$$

where the above mentioned limiting process is to be understood. This vector is still not determined up to an additive term of the form constant  $\cdot \Psi_0$ . This constant may be determined by adding to the definition of  $\Psi_{\text{Dip}}$  the postulate:

$$(\Psi_{\text{Dip}}, \eta\Psi_{\text{Dip}}) = 0.$$

$\Psi_0$  and  $\Psi_{\text{Dip}}$  are not, of course, degenerate vectors.

With these few remarks we conclude with this example, referring the reader to the original papers for further details.

These examples should be enough to show the increasing importance of indefinite metric in physics. We hope that this account will stimulate further research on its mathematical aspects.

\* \* \*

The author wishes to express his grateful thanks to Professor W. HEITLER for his continued interest in this work, and for many illuminating discussions. He is also indebted to Professors R. NEVANLINNA and K. BLEULER for useful discussions. His sincerest thanks are due to the Government of India, and the Swiss Atomic Energy Commission for financial aid.

## Forze in un corpo polarizzato e magnetizzato.

G. M. RANCOITA

*Istituto di Elettrotecnica dell'Università - Bologna*

(ricevuto il 24 Ottobre 1958)

SOMMARIO. — 1. Introduzione — 2. Generalità. — 3. Grandezze geometriche e cinematiche. — 4. Correnti elettriche; polarizzazione, magnetizzazione. — 5. Campo elettromagnetico. — 6. Impulso ed energia. Forze. — 7. Conservazione di impulso, energia, momento d'impulso. — 8. Differenziale dell'energia interna. — 9. Fluido reversibile. — 10. Fenomeni irreversibili in un corpo isotropo. — 11. Conclusione. — Bibliografia.

---

### 1. — Introduzione.

Viene proposta un'espressione del tensore impulso-energia elettromagnetico complessivo nei corpi polarizzati e magnetizzati (e della conseguente densità di forza-potenza) ricavata come effetto del campo elettromagnetico sulle cariche che costituiscono la materia polarizzata e magnetizzata, rispettando la conservazione dell'energia, dell'impulso, del momento d'impulso. L'espressione proposta viene discussa (e confrontata con le altre teorie correnti) insieme con le altre parti (meccanica, di conduzione termica, e di inerzia) del tensore impulso-energia totale, nel quadro della relatività ristretta: tale espressione ha una asimmetria limitata a un tipo tale da poter essere compensata da asimmetria della parte corrispondente agli sforzi meccanici. Il caso del fluido (in esso non c'è asimmetria) viene sviluppato completamente.

### 2. — Generalità.

Diversi sono i metodi usati per il calcolo delle forze elettromagnetiche nei corpi polarizzati e magnetizzati: metodi energetici, metodi che cercano di risalire all'origine microscopica di quelle forze, ecc. Così diversi sono anche



i campi di validità delle espressioni trovate: particolarmente coi metodi energetici corrisponderanno al campo di validità dell'espressione prescelta per l'energia. Inoltre pure per uno stesso caso le diverse teorie proposte conducono a espressioni delle forze elettromagnetiche non del tutto concordanti.

Cercheremo perciò, con tutta generalità, di esprimere queste forze in un modo che soddisfi la conservazione dell'energia, dell'impulso, del momento d'impulso, e che metta in evidenza come tali forze riassumano gli effetti del campo elettromagnetico sulle cariche elettriche che costituiscono la materia polarizzata e magnetizzata. Discuteremo poi questi fenomeni insieme a quelli meccanici e termici che si svolgono nel corpo, poichè l'accordo coi fatti sperimentali può controllarsi solo sull'impulso-energia totale, che è quello che compare nelle fondamentali equazioni fisiche, e non sulle parti di esso relative a fenomeni singoli come quelli elettromagnetici. Perciò non soddisfano le discussioni limitate a una parte, e questo ci ha dato lo spunto ad una messa a punto generale. La suddivisione del tutto in parti sarà quindi da scegliere in base alla coerenza logica della suddivisione. E può darsi che diverse teorie, opportunamente completate, diano luogo a espressioni diverse per la parte elettromagnetica ma uguali per il complesso.

Come le equazioni dei fenomeni elettromagnetici microscopici sono covarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz, così anche le equazioni dei fenomeni macroscopici, conseguenza di quelli, dovranno risultare covarianti rispetto a tali trasformazioni. Perciò, per tutti i fenomeni qui descritti si mostrerà anche l'espressione quadridimensionale nello spazio-tempo pseudo-euclideo della relatività ristretta. Si approfitterà pure di quelle notazioni quadridimensionali per semplificare molto i passaggi. Per conservare la semplicità di questo schema dovremo tuttavia lasciare da parte la gravitazione, cioè scrivere le equazioni come se questa mancasse. Della teoria qui esposta è però immediata la generalizzazione allo spazio-tempo riemanniano della relatività generale: in tal modo si tiene conto anche della gravitazione.

È stato riconosciuto che il tensore impulso-energia totale deve essere simmetrico, per rispettare la conservazione del momento d'impulso (e in accordo col ruolo di tale tensore nella relatività generale); può però essere asimmetrica la parte elettromagnetica, come è stato messo in evidenza da diversi autori, purchè ciò sia opportunamente compensato. Il tensore da noi proposto per la parte elettromagnetica, che ci sembra ricavato in completo accordo con la teoria elettronica, risulta simmetrico nei fluidi e nei solidi isotropi senza deformazioni anisotrope, asimmetrico negli altri corpi. Lo confronteremo coi tensori (di cui diamo l'espressione con le [99] [101] [100]) delle principali teorie esistenti: quello di Minkowski (e Dällenbach) e quello di Abraham.

Il tensore proposto da ABRAHAM è sempre simmetrico; la sua espressione non si accorda però con la teoria elettronica, ed appare piuttosto un tentativo di simmetrizzare il tensore di Minkowski. Quest'ultimo si è cercato di riallac-

ciarlo, particolarmente per opera di DÄLLENBACH che lo ha generalizzato, alla teoria elettronica. Ma nel confronto col tensore da noi proposto ci sono da fare i seguenti rilievi.

Ci sembra che l'asimmetria dei tensori di Minkowski e di Dällenbach sia troppo forte per poter avere la necessaria compensazione, poichè in un riferimento in cui il punto materiale considerato è fermo c'è asimmetria anche per le componenti miste spazio-temporali. Se si compensa ciò col tensore impulso-energia per sforzi meccanici si guasta l'ortogonalità alla tetravelocità che lo caratterizza e quindi tra l'altro il carattere di pura pressione nel caso dei fluidi; se si compensa col tensore per conduzione termica se ne guasta la simmetria, mentre si tratta di fenomeno totalmente diverso ed estraneo. Noi invece abbiamo approfittato di una certa arbitrarietà lasciata dalla teoria elettronica per evitare quell'asimmetria delle componenti miste nei punti fermi, e per la compensazione, ove occorre, ci basta dissimmetrizzare il tensore degli sforzi meccanici, lasciandolo ortogonale alla tetravelocità. Ciò non è affatto in contrasto col significato intuitivo di essi: anzi è proprio il bilancio di coppia che richiede la simmetria di tali sforzi in assenza di polarizzazione e magnetizzazione e ne richiede l'asimmetria in presenza di esse. Nei casi statici tale criterio è seguito anche da DURAND (*Électrostatique et magnétostatique*).

D'altra parte il riallacciamento di DÄLLENBACH alla teoria elettronica non è affatto rigoroso, come riconoscono parecchi autori e preavvisa lo stesso DÄLLENBACH. La nostra deduzione dalla teoria elettronica corrisponde a quella di Dällenbach salvo che nelle considerazioni che non ci sembrano fondate. Precisamente egli introduce nel caso elettrostatico (e poi analogamente nel caso generale) nel tensore impulso-energia elettromagnetico una pressione

$p = \int_0^E \sum_{\alpha} P_{\alpha} dE_{\alpha}$ , che riesce a dare al tensore una forma suggestivamente semplice, ma che non ci appare giustificata dal punto di vista elettronico. Infatti viene giustificata dicendo che deve tener conto (ma poi come ne tenga conto non è per nulla convincente) del fatto che sulle cariche superficiali di polarizzazione nella superficie di un volumetto polarizzato non agisca il campo macroscopico, ma solo il campo esterno, cioè il macroscopico diminuito del campo interno di polarizzazione. Ma ci sembra che questo effetto del campo di polarizzazione non debba venir tolto dal tensore, perchè tale campo esiste, e se pure è provocato dai dipoli che si trovano nel volumetto stesso e per questo rappresenta interazioni interne fra le cariche del volumetto, tali interazioni si elideranno automaticamente a vicenda quando consideriamo l'effetto integrale su tutto il volumetto. Deduzioni energetiche possono portare a riconoscere l'esistenza di una pressione di tal genere (e anche DÄLLENBACH ne fa, non bastando per essa la teoria elettronica): e infatti essa compare anche nella nostra trattazione, ma vi compare negli sforzi meccanici (eliminando così la sua ingiustificata origine elettronica).

Vedremo nella conclusione le precise differenze fra il nostro tensore e quello di Minkowski, e nello stesso tempo (supposta superata per quest'ultimo la difficoltà di compensarne l'asimmetria) la fondamentale concordanza per l'impulso-energia totale.

Recentemente il tensore di Minkowski ha fortuna presso molti autori (LAUE, PAM MAU QUAN, MOLLER) perchè per un'onda piana dà luogo a una velocità dell'energia che si trasforma come la velocità di una particella materiale (quindi con la stessa composizione delle velocità). Non manca però chi, come la scuola ungherese (NOVOBÁTZKY, MARX, NÉMETH, GYÖRGYI, NAGY) critica l'asimmetria del tensore di Minkowski, mette in evidenza come si possa giungere altrimenti alla stessa interpretazione dei fenomeni fisici purchè si tenga conto (come necessario) anche degli altri tensori (ad esempio, meccanici), e preferisce un tensore elettromagnetico simmetrico come quello di Abraham. Il nostro tensore è appunto, come quello, simmetrico nel caso dei fluidi e soddisfacente sempre, in un riferimento in cui il punto non sia in moto, alla simmetria delle componenti miste (esprimente l'equivalenza materia-energia). Ed è inoltre fondato in modo da tener conto della forza di Lorentz su tutte le cariche della materia.

Un altro tensore simmetrico è quello proposto nel 1949 da KNEISSLER, sviluppato da SOMMERFELD e BOPP e ripreso da LAMPARIELLO. Esso non è altro che una parte del nostro tensore completo, cioè la parte  $T_{B\alpha\beta}$  (di cui costituisce anzi le componenti spaziali  $T_{B\alpha\beta}$ ) che noi chiamiamo impulso-energia del campo elettromagnetico e di cui appare nel seguito il significato.

Notiamo che LIVENS impostò la sua teoria delle forze elettromagnetiche in modo uguale alla nostra teoria tridimensionale che premettiamo alla teoria completa quadridimensionale. La trattazione di LIVENS differisce però dalla nostra perchè LIVENS omise nella densità superficiale di corrente per polarizzazione un termine  $[\mathbf{v} \times \mathbf{n}] \mathbf{P}$  che va aggiunto al  $[\mathbf{P} \wedge \mathbf{v}] \wedge \mathbf{n}$ , indi perchè LIVENS modificò poi la (sola) parte magnetica della forza (con una pressione assai diversa da quella di Dällenbach) per eliminare non ben chiare interazioni interne; inoltre LIVENS si fermò alle considerazioni tridimensionali, mentre noi abbiamo completato la cosa relativisticamente mostrando il sorgere di impulso ed energia immagazzinati nella materia per la trasmissione delle azioni superficiali del campo effettuate dai legami che tengono insieme ogni molecola polarizzata e magnetizzata. Infine la nostra discussione abbinata a quella delle parti meccaniche e termiche evita le obiezioni che vennero fatte a LIVENS di non concordanza coi metodi energetici.

Per la nostra trattazione abbiamo studiato un simbolismo che si estenda coerentemente ai diversi tipi di fenomeni fisici prestandosi a raccogliarli insieme nelle definizioni ed equazioni generali che abbiamo riepilogato.

Abbiamo sempre cercato, pur seguendo la trattazione relativistica, di definire le grandezze come generalizzazioni il più aderenti possibile alle corri-

spondenti grandezze classiche. Così abbiamo fatto sia usando relativisticamente il concetto di energia interna  $U$  sia nell'inquadramento della conduzione termica nel tensore impulso-energia e nel II principio della termodinamica.

### 3. - Grandezze geometriche e cinematiche.

Premettiamo che alle parentesi entro cui stanno delle grandezze daremo sempre il seguente significato: parentesi quadra raggruppa a costituire un fattore unico ciò che vi è dentro; parentesi tonda contiene le variabili di cui è funzione la grandezza che sta prima della parentesi; parentesi graffa contiene le diverse componenti di un tensore od altro.

Indicheremo in alfabeto italiano gli indici (riferentisi allo spazio-tempo) suscettibili di assumere i valori 1, 2, 3, 4; in alfabeto greco quelli (riferentisi allo spazio) suscettibili di assumere i valori 1, 2, 3.

Sottintenderemo il segno di sommatoria  $\sum$  sugli indici ripetuti due volte in un tensore o prodotto (saturazione degli indici).

Numereremo entro ( ) le relazioni macroscopiche conclusive fra le fondamentali grandezze quadridimensionali, entro { } quelle fra le tridimensionali, entro [ ] relazioni comunque interessanti.

Sia  $c$  la velocità della luce nel vuoto;  $i = \sqrt{-1}$ .

$x_i = \{x y z\}$  rappresentino coordinate cartesiane ortogonali spaziali,  $t$  il tempo.

Così l'elemento di lunghezza  $dl$  dello spazio euclideo è dato da

$$[1] \quad dl^2 = \sum_{\alpha} dx_{\alpha}^2$$

e quello  $ds$  dello spazio-tempo pseudo-euclideo della relatività ristretta individuato da coordinate cartesiane generalizzate

$$[2] \quad x_j = \{x y z ict\};$$

$$[3] \quad -ds^2 = \sum_j dx_j^2.$$

Notiamo, rispettivamente in 4 e in 3 dimensioni: il tensore di Kronecker (1) e {1}, e il tensore di Ricci (2) e {2}:

(1)	$\delta_{jk} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{se indici diversi} \\ 1 & \text{» » uguali} \end{array} \right\} = \delta_{\alpha\beta}$	{1}
(2)	$\eta_{jkh\alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{se indici non tutti diversi} \\ +1 & \text{se indici tutti diversi formano permutazioni pari} \\ -1 & \text{» » » » » » » dispari} \end{array} \right\} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$	{2}



Per i vettori spaziali ( $\mathbf{a}$  di componenti  $a_\alpha$ , ecc.) useremo le notazioni:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_\alpha b_\alpha \quad [\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}]_\alpha = \eta_{\alpha\beta\zeta} a_\beta b_\zeta,$$

$$\nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad \text{grad } f = \nabla f \quad \text{div } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} \quad \text{rot } \mathbf{a} = \nabla \wedge \mathbf{a}.$$

Individuiamo ciascun punto materiale con una terna di coordinate  $x'_1, x'_2, x'_3$  rappresentante a qualunque tempo lo stesso punto materiale (costituita, ad esempio, da coordinate spaziali qualsiasi dei punti per  $t = 0$ ). Tridimensionalmente le leggi del moto della materia si esprimono con la  $\{3\}$ , da cui si deduce il trivettore velocità  $\{5\}$ :

$\{3\} \quad \{4\}$ $x_\alpha = x_\alpha(x'_1, x'_2, x'_3, t)$	$\{5\} \quad \{6\} \quad \{7\}$ $v_\alpha = \frac{\partial x_\alpha(x'_1, x'_2, x'_3, t)}{\partial t}$	$v^2 = \sum_\alpha v_\alpha^2$	$\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 1$ $\mathbf{v}_i \times \mathbf{n} = \mathbf{v}_e \times \mathbf{n}$
---	---	--------------------------------	---

Quadrivisionalmente le leggi del moto sono espresse dalla trasformazione di coordinate (3), in cui può essere  $ict' = ict$  oppure un  $t'$  qualunque.

$(3) \quad (4) \quad x_j = x_j(x'_1, x'_2, x'_3, ict') \quad ict' = x'_4$	$\varphi(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$
$(5) \quad (6) \quad V_j = \frac{\partial x_j}{\partial t'} \frac{1}{\sqrt{-[1/c^2] \sum_h [\partial x_h / \partial t']^2}}$	$N_j = \sum_u \frac{1}{\sqrt{\sum_h [\sum_k [\partial \varphi / \partial x'_k] [\partial x'_k / \partial x_h]]^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_u} \frac{\partial x'_u}{\partial x_j}$

A ogni punto materiale corrisponde nello spazio-tempo la sua linea oraria, un elemento della quale è lungo

$$ds = \left| - \sum_j \left[ \frac{\partial x_j}{\partial t'} dt' \right]^2 - dt'^2 \right| = dt' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Indichiamo sinteticamente per una qualunque funzione  $f$

$$[4] \quad c \frac{df}{ds} = \frac{c}{\sqrt{-\sum_j [\partial x_j / \partial t']^2}} \frac{\partial f(x'_1, x'_2, x'_3, ict')}{\partial t'}.$$

Il quadrivettore velocità o tetravelocità è (5) definito da

$$[5] \quad [6] \quad V_j = c \frac{dx_j}{ds} \quad \text{per cui} \quad \sum_j V_j^2 = -c^2,$$

$$[7] \quad V_j = \left\{ \frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{ic}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\}.$$

Un punto fondamentale e due infinitamente vicini determinano un parallelogrammo di area  $d\sigma$  e versore normale  $\mathbf{n}$  soddisfacente la {4}; il punto e tre infinitamente vicini determinano un parallelepipedo di volume  $dV$ .

Orienteremo sempre verso l'esterno la normale  $\mathbf{n}$  a una superficie  $\sigma$  chiusa. Così anche considerando una superficie  $\sigma$  di discontinuità fra due mezzi che chiamiamo, ad arbitrio se  $\sigma$  non è chiusa, « interno » ed « esterno ». Metteremo la lettera  $i$  sotto i tensori del mezzo interno, la  $e$  dell'esterno. L'impenetrabilità fra i due mezzi materiali è espressa dalla {7}.

Pensando i punti che determinano  $d\sigma$ ,  $\mathbf{n}$ , e  $dV$  come punti materiali con le loro linee orarie, e partendo da tali grandezze in un riferimento in cui il punto fondamentale è fermo, si hanno gli invarianti quadridimensionali area in quiete  $d\sigma_0$ , volume in quiete  $dV_0$ , e la tetranormale  $N_j$  (unica per la {7} a qualunque dei due mezzi si consideri appartenere la superficie):

$$[8][9][10] \quad N_j = \frac{1}{\sqrt{1 - [\mathbf{v}/c] \times \mathbf{n}}^2} \left\{ n_x n_y n_z i \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{n} \right\} \text{ per cui } N_j N_j = 1, \quad N_j V_j = 0,$$

$$[11][12] \quad d\sigma_0 = d\sigma \frac{\sqrt{1 - [\mathbf{v}/c] \times \mathbf{n}}^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dV_0 = \frac{dV}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Una superficie materiale è definita da una relazione (4), e la sua tetranormale è espressa da (6).

#### 4. - Correnti elettriche; polarizzazione, magnetizzazione.

Useremo il sistema Giorgi, definendo coerentemente ad esso anche le grandezze quadridimensionali.  $\epsilon_0$  rappresenti la costante dielettrica del vuoto,  $\mu_0$  la permeabilità magnetica del vuoto, cosicchè

$$[13] \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Consideriamo un elemento di volume  $dV$ . In esso si troveranno delle cariche mobili liberamente (o quasi) rispetto alla materia (esempio, elettroni di conduzione)  $dq_{\text{mob}}$  di velocità  $\mathbf{v}_{\text{mob}}$  (cui corrisponda la tetravelocità  $V_{\text{mob}j}$ ). Inoltre la materia contenuta in  $dV$  avrà delle cariche ad essa legate (nuclei atomici ed elettroni legati)  $dq_{\text{leg}}$ . Si hanno allora le grandezze tridimensionali

$$[14] \quad \text{densità di carica} \quad \varrho = \frac{dq_{\text{leg}}}{dV} + \frac{dq_{\text{mob}}}{dV},$$

$$\text{densità di corrente di convezione} \quad \varrho \mathbf{v},$$

$$[15] \quad \text{densità di corrente di conduzione} \quad \mathbf{J} = \frac{dq_{\text{mob}}}{dV} [\mathbf{v}_{\text{mob}} - \mathbf{v}],$$

e il corrispondente tetravettore tetradensità di corrente

$$[16] [17] \quad J_j = \frac{dq_{leg}}{dV_0} V_j + \frac{dq_{mob}}{dV_{0mob}} V_{mobj} = \{qv_x + J_x, qv_y + J_y, qv_z + J_z, icq\},$$

in cui ovviamente si è usato l'invariante

$$dV_{0mob} = \frac{dV}{\sqrt{1 - v_{mob}^2/c^2}}.$$

Analogamente con due sistemi di cariche su di una superficie: le  $dq_{leg}$  siano, per fissare le idee, legate al mezzo interno, le  $dq_{mob}$  in moto qualunque rispetto ad esse: si hanno le grandezze

$$[18] \quad \text{densità superficiale di carica} \quad \rho_\sigma = \frac{dq_{leg}}{d\sigma} + \frac{dq_{mob}}{d\sigma},$$

$$\text{densità superficiale di corrente di convezione} \quad \rho_\sigma \mathbf{v}_i,$$

$$[19] \quad \text{densità superficiale di corrente di conduzione} \quad J_{\sigma ic} = \frac{dq_{mob}}{d\sigma} [\mathbf{v}_{mob} - \mathbf{v}_i],$$

$$[20] \quad J_{\sigma ic} \times \mathbf{n} = 0,$$

(rispetto al mezzo interno, onde sotto al vettore abbiamo scritto  $\sigma_i$ )  
e la tetradensità superficiale di corrente

$$[21] [22] \quad J_j = \frac{dq_{leg}}{d\sigma_0} V_j + \frac{dq_{mob}}{d\sigma_{0mob}} V_{mobj} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - [\mathbf{v}_i/c] \times \mathbf{n}]^2}} \{ \rho_\sigma v_x + J_{\sigma icx}, \rho_\sigma v_y + J_{\sigma icy}, \rho_\sigma v_z + J_{\sigma icz}, ic\rho_\sigma \},$$

$$[23] \quad J_j N_j = 0.$$

Gli invarianti  $d\sigma_0$ ,  $d\sigma_{0mob}$  sono stati formati con  $d\sigma$  e, rispettivamente,  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{v}_{mob}$ .

Torniamo alle cariche volumetriche. Osserviamo che anche le cariche legate alla materia sono in moto reciproco (microscopico) dando luogo alla polarizzazione e alla magnetizzazione. Un corpo polarizzato e magnetizzato si potrà immaginare come la sovrapposizione di diversi reticoli (di cariche) reciprocamente in moto, ciascuno formato da cariche di un certo tipo; ma risulterà più chiaro pensare distribuite le cariche di ognuno di quei reticoli e schematizzare il corpo come una sovrapposizione di diversi sistemi continui di cariche. A un volume (infinitesimo) di materia  $dV$ , cui corrisponde il volume in quiete

$dV_0$ , siano vincolate le cariche  $dq_I$ ,  $dq_{II}$ ,  $dq_{III}$  ecc.: indicando  $dq_W$  la carica del sistema generico  $W$  ( $W = I, II, III, \dots$ ), la carica totale legata al volume è

$$[24] \quad dq_{\text{leg}} = \sum_W dq_W.$$

Tali cariche abbiano un piccolo spostamento (variabile nel tempo) rispetto alla materia, e, se le coordinate dei punti materiali sono le  $x_j$ , possiamo individuare le linee orarie delle cariche  $W$  con lo stesso sistema di coordinate in infiniti modi, dei quali due particolarmente interessanti sono:

la descrizione tridimensionale

$$x_\alpha + l_{W\alpha}(x_\beta, t);$$

la descrizione quadridimensionale

$$[25] \quad x_j + l_{Wj}(x_k) \quad \cdot \quad l_{0Wj}V_j = 0,$$

dove lo spostamento  $l_{0Wj}$  è del tutto determinato dall'ortogonalità alla tetra-velocità.

Consideriamo i momenti elettrici rispetto al punto materiale: di I ordine (dipolo elettrico), di II ordine (quadrupolo elettrico, dipolo magnetico), e così via. Supponiamo trascurabili i momenti di ordine superiore, e nulli o trascurabili i momenti di quadrupolo elettrico. :

$$[26] [27] \quad dp_{\alpha\beta} = \sum_W dq_W \frac{1}{2} l_{W\alpha} l_{W\beta} = 0, \quad dp_{jk} = \sum_W dq_W \frac{1}{2} l_{0Wj} l_{0Wk} = 0.$$

Definiamo i vettori densità di momento elettrico e magnetico nella materia: tridimensionalmente

$$[28] \quad \text{polarizzazione:} \quad \mathbf{P} = \sum_W \frac{dq_W}{dV} \mathbf{l}_W,$$

$$[29] \quad \text{magnetizzazione} \quad \mathbf{M} = \mu_0 \sum_W \frac{dq_W}{dV} \frac{1}{2} \mathbf{l}_W \wedge \frac{d\mathbf{l}_W}{dt};$$

quadridimensionalmente

$$[30] \quad \text{polarizzazione in quiete} \quad \gamma_j = \sum_W \frac{dq_W}{dV_0} l_{Wj}, \quad \gamma_j V_j = 0,$$

magnetizzazione in quiete

$$[31] \quad l_j = \frac{1}{2} \eta_{jk} \gamma_k \mu_0 \sum_W \frac{dq_W}{dV_0} \frac{1}{2} \left[ l_{Wk} c \frac{dl_{Wk}}{ds} - l_{0Wk} c \frac{dl_{0Wk}}{ds} \right] \frac{V_u}{ic}, \quad l_j V_j = 0:$$



questi due vettori, ortogonali alla tetravelocità, sono legati ai trivettori dalle

$$[32] \quad \gamma_\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} P_\alpha + \frac{\mathbf{P} \times \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} v_\alpha + \frac{[\mathbf{M} \wedge \mathbf{v}]_\alpha}{\mu_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \gamma_4 = \frac{\mathbf{P} \times \mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} i c,$$

$$[33] \quad l_j = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left\{ M_x, M_y, M_z, \frac{i}{c} \mathbf{M} \times \mathbf{v} \right\}.$$

La tetradensità di corrente  $J_j$  tiene conto col termine  $[dq_{\text{leg}}/dV_0]V_j$  delle cariche legate alla materia come se fossero in moto esattamente con essa; ma il fatto che tali cariche abbiano rispetto alla materia i piccoli spostamenti già definiti fa sì che la tetradensità di corrente complessiva si ottenga (trascu- rando i momenti che si sono supposti trascurabili) aggiungendo alla  $J_j$  le tetradensità di corrente di polarizzazione e magnetizzazione

$$[34] [35] \quad J_j = \frac{\partial}{\partial x_k} [\gamma_j V_k - \gamma_k V_j], \quad J_I = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \eta_{jkh u} \frac{l_h}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} \right].$$

Analogamente dalla descrizione tridimensionale si ricavano le:

$$[36] \quad \text{densità di carica di polarizzazione} \quad \rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}$$

(l'analogia di magnetizzazione è nulla),

$$[37] \quad \text{densità di corrente di polarizzazione} \quad \mathbf{J}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\mathbf{P} \wedge \mathbf{v}],$$

$$[38] \quad \text{densità di corrente di magnetizzazione} \quad \mathbf{J}_M = \operatorname{rot} \frac{\mathbf{M}}{\mu_0},$$

con le relazioni (valide solo così, per le somme)

$$J_\alpha + J_I \alpha = J_P \alpha + J_M \alpha, \quad J_4 + J_I 4 = ic \rho.$$

Ma le cariche volumetriche legate alla materia e in moto microscopico rispetto ad essa danno luogo anche, sulle superfici di discontinuità di pola- rizzazione e magnetizzazione, alle tetradensità superficiali di corrente di pola- rizzazione e magnetizzazione

$$[39] \quad J_{\sigma j} = [\gamma_j V_h - \gamma_h V_j - \gamma_i V_k + \gamma_k V_i] N_k,$$

$$[40] \quad J_I^j = \eta_{jkh u} \left[ \frac{l_h}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} - \frac{l_i}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} \right] N_k.$$

Le grandezze tridimensionali risultano:

$$[41] \quad \text{densità superficiale di carica di polarizzazione } \frac{\rho}{\sigma_P} = -\mathbf{P}_0 \times \mathbf{n} + \mathbf{P}_1 \times \mathbf{n},$$

(l'analogia di magnetizzazione è nulla),

$$[42] \quad \text{densità superficiale di corrente di polarizzazione } \mathbf{J}_P = -[\mathbf{P}_0 \times \mathbf{n}] \mathbf{v}_0 + [\mathbf{P}_1 \times \mathbf{n}] \mathbf{v}_1,$$

$$[43] \quad \text{densità superficiale di corrente di magnetizzazione } \mathbf{J}_M = \mathbf{n} \wedge \frac{\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_1}{\mu_0}.$$

L'esistenza di queste cariche e correnti superficiali si vede subito considerando una superficie  $\sigma$  che limiti un corpo (o una sua parte) polarizzato e magnetizzato interno da un ambiente che pensiamo non lo sia. Ogni sistema  $W$  di cariche volumetriche legate alla materia interna a  $\sigma$  occuperà un volume che per gli spostamenti microscopici non è esattamente sovrapposto a quella materia, ma in parte esce venendo a trovarsi in zona esterna a  $\sigma$ , e in altra parte di  $\sigma$  lascia invece priva delle cariche del sistema  $W$  una zona lungo  $\sigma$ . Le cariche e correnti uscite (quindi uscite in senso algebrico) da  $\sigma$  dovranno immaginarsi come tetracorrenti superficiali su  $\sigma$  stessa, di densità

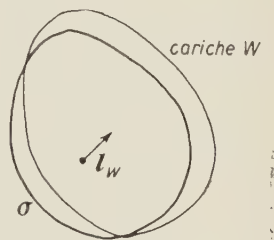


Fig. 1.

$$[44] [45] \quad J_{\sigma I^j} = [-Y_j V_k + Y_k V_j] N_k, \quad J_{\sigma I^j} = -\eta_{jkh u} \frac{l_h}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} N_k,$$

cioè cariche e correnti superficiali di densità

$$[46] [47] [48] \quad \frac{\rho}{\sigma_P} = \mathbf{P} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{J}_{\sigma P} = [\mathbf{P} \times \mathbf{n}] \mathbf{v}, \quad \mathbf{J}_{\sigma M} = \mathbf{n} \wedge \left[ -\frac{\mathbf{M}}{\mu_0} \right]:$$

esse sono necessarie a completare la descrizione delle cariche legate alla materia interna a  $\sigma$ : se  $\sigma$  è semplicemente ideale, senza discontinuità su di essa, tali tetracorrenti sono neutralizzate da quelle uguali e contrarie dovute alla materia esterna a  $\sigma$ ; ma se su  $\sigma$  polarizzazione e magnetizzazione sono realmente discontinue le tetracorrenti dovute alla materia esterna sommandosi a quelle dovute all'interna danno luogo alle risultanti [39] [40].

## 5. - Campo elettromagnetico.

Cariche e correnti elettriche danno luogo al campo elettromagnetico. Esso è descritto dal tensore antisimmetrico (7) campo elettromagnetico  $B_{jk}$  che sin-

tetizza campo elettrico  $\mathbf{E}$  e induzione magnetica  $\mathbf{B}$  secondo la

$$[49] \quad B_{jk} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c} E_z \\ \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z & 0 \end{bmatrix}.$$

Le equazioni fondamentali del campo sono le equazioni di Maxwell, qu] scritte nel sistema Giorgi, (8) [50]; cioè tridimensionalmente {8} {9} [56] [57]

$$[50] [51] \quad \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_{jk}}{\partial x_k} = J_j + J_j^{\sigma} + J_j^{\sigma}, \quad \frac{1}{\mu_0} [B_{jk} - B_{jk}] N_k = J_j^{\sigma} + J_j^{\sigma} + J_j^{\sigma},$$

$$[52] \quad B_{jk} = B_{jk} + \mu_0 [J_j^{\sigma} + J_j^{\sigma} + J_j^{\sigma}] N_k - [J_k^{\sigma} + J_k^{\sigma} + J_k^{\sigma}] N_j,$$

(7) (8) (9)	$B_{jk} = -B_{kj}$	$\frac{1}{2} \eta_{jkh} \frac{\partial B_{hu}}{\partial x_k} = 0$	$\frac{1}{2} \eta_{jkh} [B_{hu} - B_{hu}] N_k = 0$
(10) (11)	$\gamma_j V_j = 0$	$l_j V_j = 0$	
(12)	$H_{jk} = \frac{1}{\mu_0} B_{jk} - [\gamma_j V_k - \gamma_k V_j] - \eta_{jkh} \frac{l_h}{\mu_0} \frac{V_u}{ic}$		
(13) (14)	$\frac{\partial H_{jk}}{\partial x_k} = J_j$		$[H_{jk} - H_{jk}] N_k = J_j^{\sigma}$
(15) (16)	$E_j = B_{jk} V_k$	$B_j = \frac{1}{2} \eta_{jkh} B_{hu} \frac{V_k}{ic}$	

$$[53] \quad D_j = \frac{1}{c^2} H_{jk} V_k = \epsilon_0 E_j + \gamma_j, \quad E_j V_j = 0, \quad B_j V_j = 0,$$

$$[54] \quad H_j = \frac{1}{2} \eta_{jkh} H_{hu} \frac{V_k}{ic} = \frac{B_j - l_j}{\mu_0} \quad D_j V_j = 0, \quad H_j V_j = 0,$$

$$(13) \rightarrow [55] \quad \frac{\partial J_j}{\partial x_j} = 0.$$

Analogamente, alla superficie di separazione di due mezzi materiali si hanno le [(9) [51], che risolte danno la [52]; cioè tridimensionalmente le {10} {11} [58] [59].

$$[56] \quad \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \varrho \mathbf{v} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$[58] \quad \mathbf{n} \wedge \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i] = \frac{\varrho}{\sigma_i} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{J}}{\sigma_{ic}} + \frac{\mathbf{J}}{\sigma_p} + \frac{\mathbf{J}}{\sigma_m} - \mathbf{v} \times \mathbf{n} \varepsilon_0 [\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i],$$

$$[57] [59] \quad \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho + \frac{\varrho}{\sigma}, \quad \mathbf{n} \times \varepsilon_0 [\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i] = \frac{\varrho}{\sigma} + \frac{\varrho}{\sigma_p},$$

{8}	{9}	{10}	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\mathbf{n} \times [\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i] = 0$
	{11}				$\mathbf{n} \wedge [\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i] = \mathbf{v} \times \mathbf{n} [\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i]$
{12}	{13}		$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M} - \mu_0 \mathbf{P} \wedge \mathbf{v}$	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	
{14}	{15}	{16}	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varrho \mathbf{v} + \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho$	$\mathbf{n} \wedge [\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_i] =$ $= \frac{\varrho}{\sigma_i} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{J}}{\sigma_{ic}} - \mathbf{v} \times \mathbf{n} [\mathbf{D}_e - \mathbf{D}_i]$
	{17}				$\mathbf{n} \times [\mathbf{D}_e - \mathbf{D}_i] = \frac{\varrho}{\sigma},$

$$\{14\} \{15\} \rightarrow [60] \quad \operatorname{div} [\varrho \mathbf{v} + \mathbf{J}_e] = - \frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

La (8) è senz'altro soddisfatta introducendo con la

$$[61] [62] [63] \quad B_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \quad \text{cioè} \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = - \operatorname{grad} U - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

il tetrapotenziale vettore  $A_j$  che sintetizza il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  e il potenziale scalare  $U$  secondo la

$$[64] \quad A_j = \left\{ A_x \ A_y \ A_z \ \frac{i}{c} U \right\}.$$

Le [50] [51] si semplificano nelle (13) (14) introducendo il tensore  $H_{jk}$  definito dalla (12). Esso sintetizza l'induzione elettrica  $\mathbf{D}$  e il campo magnetico  $\mathbf{H}$  definiti dalle {13} {12}:

$$[65] \quad H_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}$$

e con tali vettori le [56] [57] [58] [59] divengono le {14} {15} {16} {17}.

La (13) contiene implicitamente la conservazione della carica [55], cioè tridimensionalmente [60] che integrata a un volume  $V$  limitato da una super-



ficie  $\sigma$  dà appunto

$$[66] \quad -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \, dV = \int_\sigma [\varrho \mathbf{v} + \mathbf{J}_e] \times \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Introduciamo gli utili tetravettori campo elettrico in quiete  $E_j$  (15), induzione magnetica in quiete  $B_j$  (16): con essi  $B_{jk}$  si forma mediante la

$$B_{jk} = -\frac{i}{c} \left[ E_j \frac{V_k}{ic} - E_k \frac{V_j}{ic} \right] + \eta_{jkh\alpha} B_h \frac{V_\alpha}{ic},$$

e le loro espressioni tridimensionali sono

$$[67] \quad E_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]_\alpha, \quad E_4 = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$[68] \quad B_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left[ \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \right]_\alpha, \quad B_4 = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Analogamente a  $H_{jk}$  sono legati i tetravettori induzione elettrica in quiete  $D_j$  [53], campo magnetico in quiete  $H_j$  [54]:

$$H_{jk} = -ic \left[ D_j \frac{V_k}{ic} - D_k \frac{V_j}{ic} \right] + \eta_{jkh\alpha} H_h \frac{V_\alpha}{ic},$$

$$[69] \quad D_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left[ \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \right]_\alpha, \quad D_4 = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$[70] \quad H_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} [\mathbf{H} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{D}]_\alpha, \quad H_4 = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{H} \times \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Notiamo che dalle nostre formule quadridimensionali si passa a quelle consuete espresse nel sistema di Gauss razionalizzato sostituendo alle nostre grandezze quelle che qui sotto ciascuna si indicano:

$B_{jk}$	$J_j$	$H_{jk}$	$Y_j$	$l_j$	$A_j$
$\sqrt{\mu_0} B_{jk}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \frac{J_j}{c}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} H_{jk}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \frac{Y_j}{c}$	$\sqrt{\mu_0} l_j$	$\sqrt{\mu_0} A_j$
$E_j$	$B_j$	$D_j$	$H_j$	$\mu$	$\varepsilon$
$\sqrt{\mu_0} c E_j$	$\sqrt{\mu_0} B_j$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \frac{D_j}{c}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} H_j$	$\mu_0 \mu$	$\varepsilon_0 \varepsilon$

Analogo passaggio di unità si può fare per le grandezze tridimensionali con le corrispondenti sostituzioni, che completiamo con le

$$\begin{array}{cc} \varrho & U \\ \frac{1}{\mu_0} \frac{\varrho}{c} & \sqrt{\mu_0} c U. \end{array}$$

## 6. - Impulso ed energia. Forze.

(17)	$\bar{T}_{jk} = -\frac{1}{\mu_0} B_{jh} B_{hk} - \delta_{jk} \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_0} B_{uh} B_{uh}$
(18)	$\bar{T}_{jk} = -B_{jh} V_h Y_k$
(19)	$\bar{T}_{jk} = B_{jh} \eta_{hkrv} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} - \frac{1}{c^2} B_{jh} \eta_{hkrv} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} V_a V_k$
(20) (21) (22)	$\frac{\partial [C V_j]}{\partial x_j} = 0 \quad \bar{T}_{jk} V_j = 0 = \bar{T}_{kj} V_j \quad Q_j V_j = 0$
(23)	$T_{jk} = C \left[ 1 + \frac{U}{c^2} \right] V_j V_k + \bar{T}_{jk} + \frac{1}{c^2} [V_j Q_k + V_k Q_j] + \bar{T}_{jk} + \bar{T}_{jk} + \bar{T}_{jk}$
(24) (25)	$\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} = 0$
(26)	$T_{jk} = T_{kj}$

$$-[\bar{T}_{jk} - \bar{T}_{kj}] N_k + K_{\sigma j} = 0$$

$\bar{T}_{jk}$  impulso-energia del campo elettromagnetico

$\bar{T}_{jk}$  » » per polarizzazione

$\bar{T}_{jk}$  » » per magnetizzazione

$C \left[ 1 + \frac{U}{c^2} \right] V_j V_k$  » » per inerzia

$\bar{T}_{jk}$  » » per sforzi meccanici

$\bar{T}_{jk} = \frac{1}{c^2} [V_j Q_k + V_k Q_j]$  » » per conduzione termica

$T_{jk}$  impulso-energia totale

$C$  densità in quiete di materia, a cui imponiamo la conservazione della materia (20)

$U$  energia interna (della quantità unitaria di materia)

$Q_j$  tetraflusso di calore

$K_{\sigma j}$  densità di forza-potenza superficiale

$$\begin{array}{ll}
 \{18\} \quad \{19\} & \left\{ \begin{array}{l} \tau_{B\alpha\beta} = - \left[ \varepsilon_0 E_\alpha E_\beta + \frac{1}{\mu_0} B_\alpha B_\beta \right] + \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 E_\zeta E_\zeta + \frac{1}{\mu_0} B_\zeta B_\zeta \right] \quad \mathbf{I}_B = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \\ \{20\} \quad \{21\} \quad \mathbf{S}_B = \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad \mathbf{W}_B = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 E_\zeta E_\zeta + \frac{1}{\mu_0} B_\zeta B_\zeta \right] \end{array} \right. \\
 \{22\} \quad \{23\} & \left\{ \begin{array}{l} \tau_{P\alpha\beta} = [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]_\alpha P_\beta \quad I_{P^\alpha} = \frac{S_P^\alpha + [\tau_{P^\alpha\zeta} - \tau_{P^\zeta\alpha}] v_\zeta}{c^2 [1 - v^2/c^2]} + \frac{[S_P^\zeta - \tau_{P^\zeta\zeta} v_\zeta] v_\zeta}{c^4 [1 - v^2/c^2]^2} v_\alpha \\ \{24\} \quad \{25\} \quad \mathbf{S}_P = - [\mathbf{E} \times \mathbf{v}] \mathbf{P} \quad \mathbf{W}_P = \frac{S_P^\zeta v_\zeta}{c^2 [1 - v^2/c^2]} + \frac{[S_P^\zeta - \tau_{P^\zeta\zeta} v_\zeta] v_\zeta}{c^2 [1 - v^2/c^2]^2} \end{array} \right. \\
 \{26\} \quad \{27\} & \left\{ \begin{array}{l} \tau_{M\alpha\beta} = \frac{M_\alpha}{\mu_0} B_\beta - \delta_{\alpha\beta} \frac{M_\zeta}{\mu_0} B_\zeta \quad I_{M^\alpha} = \frac{S_M^\alpha + [\tau_{M^\alpha\zeta} - \tau_{M^\zeta\alpha}] v_\zeta}{c^2 [1 - v^2/c^2]} + \frac{[S_M^\zeta - \tau_{M^\zeta\zeta} v_\zeta] v_\zeta}{c^4 [1 - v^2/c^2]^2} v_\alpha \\ \{28\} \quad \{29\} \quad \mathbf{S}_M = - \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} \quad \mathbf{W}_M = \frac{S_M^\zeta v_\zeta}{c^2 [1 - v^2/c^2]} + \frac{[S_M^\zeta - \tau_{M^\zeta\zeta} v_\zeta] v_\zeta}{c^2 [1 - v^2/c^2]^2} \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \left\{ \begin{array}{l} \tau_{B\alpha\beta} \\ \mathbf{I}_B \\ \mathbf{S}_B \\ \mathbf{W}_B \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \text{flusso d'impulso del campo elettromagnetico} \\ \text{densità d'impulso del campo elettromagnetico} \\ \text{flusso di energia del campo elettromagnetico} \\ \text{densità di energia del campo elettromagnetico} \end{array} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \tau_{P\alpha\beta} \\ \mathbf{I}_P \\ \mathbf{S}_P \\ \mathbf{W}_P \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \text{flusso d'impulso per cariche superficiali di polarizzazione} \\ \text{densità d'impulso per polarizzazione} \\ \text{flusso di energia per cariche superficiali di polarizzazione} \\ \text{densità di energia per polarizzazione} \end{array} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \tau_{M\alpha\beta} \\ \mathbf{I}_M \\ \mathbf{S}_M \\ \mathbf{W}_M \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \text{flusso d'impulso per correnti superficiali di magnetizzazione} \\ \text{densità d'impulso per magnetizzazione} \\ \text{flusso di energia per correnti superficiali di magnetizzazione} \\ \text{densità di energia per magnetizzazione} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} [71] \quad & \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial I_{B\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial \tau_{B\alpha\beta}}{\partial x_\beta} &= [\varrho + \varrho_P] \mathbf{E} + [\varrho \mathbf{v} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M] \wedge \mathbf{B} \end{aligned} \right. \\ [72] \quad & \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial W_B}{\partial t} - \frac{\partial S_{B\beta}}{\partial x_\beta} &= \mathbf{E} \times [\varrho \mathbf{v} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M] \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [73] \quad & \left\{ \begin{aligned} -[\tau_{P\alpha\beta} + \tau_{M\alpha\beta}] n_\beta &= [\varrho_P \mathbf{E} + [\mathbf{J}_{\sigma P} + \mathbf{J}_{\sigma M}] \wedge \mathbf{B}]_\alpha \\ [74] \quad & \left\{ \begin{aligned} -[S_{P\beta} + S_{M\beta}] n_\beta &= \mathbf{E} \times [\mathbf{J}_{\sigma P} + \mathbf{J}_{\sigma M}] \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{30\} \{31\} \quad & I_F = \frac{\tau_{\alpha\zeta} v_\zeta}{c^2 [1 - v^2/c^2]} \quad W_F = \frac{\tau_{\xi\zeta} v_\xi v_\zeta}{c^2 [1 - v^2/c^2]} \\ \{32\} \{33\} \quad & \left\{ \begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \frac{v_\alpha q_\beta}{c^2 [1 - v^2/c^2]} \quad I_\alpha = \frac{\tau_{\alpha\zeta} v_\zeta}{c^2 [1 - v^2/c^2]} + \frac{q_\alpha}{c^2 [1 - v^2/c^2]} + \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{c^4 [1 - v^2/c^2]^2} v_\alpha \\ \{34\} \quad & \left\{ \begin{aligned} W_q &= \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{c^2 [1 - v^2/c^2]} + \frac{\tau_{\xi\zeta} v_\xi v_\zeta}{c^2 [1 - v^2/c^2]} + \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{c^2 [1 - v^2/c^2]^2} \end{aligned} \right. \\ \{35\} \quad & \text{div} [\mathbf{v}] = -\frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$\tau_{\alpha\beta}$  tensore degli sforzi meccanici  $I_F$  densità d'impulso per sforzi meccanici

$W_F$  densità di energia per sforzi meccanici

$\mathbf{q}$  flusso di calore

$\tau_{q\alpha\beta}$  sforzi termici  $I_q$  densità d'impulso per conduzione termica

$W_q$  densità di energia per conduzione termica

$v$  densità di materia, a cui si impone la conservazione della materia {35}

$U$  energia interna (della quantità unitaria di materia).



$$\{36\} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\nu[1 + U/c^2]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v_\alpha \right] + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[ \frac{\nu[1 + U/c^2]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v_\alpha v_\beta \right] + \frac{\partial}{\partial t} [I_F^\alpha + I_Q^\alpha + I_P^\alpha + I_M^\alpha] + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\beta} [(I_F^\alpha + I_Q^\alpha + I_P^\alpha + I_M^\alpha) v_\beta] = - \frac{\partial}{\partial x_\beta} [\tau_{\alpha\beta} + \tau_{q\alpha\beta}] + K_{em}^\alpha$$

$$\{37\} \quad K_{em}^\alpha = - \frac{\partial I_B^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \tau_{B\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} [\tau_{P\alpha\beta} + \tau_{M\alpha\beta}]$$

$$\{38\} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{c^2 \nu + \nu U}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[ \frac{c^2 \nu + \nu U}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v_\beta \right] + \frac{\partial}{\partial t} [W_F + W_Q + W_P + W_M] + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\beta} [(W_F + W_Q + W_P + W_M) v_\beta] = - \frac{\partial}{\partial x_\beta} [\tau_{\alpha\beta} + \tau_{q\alpha\beta}] v_\alpha - \frac{\partial q_\beta}{\partial x_\beta} + N_{em}$$

$$\{39\} \quad N_{em} = - \frac{\partial W_B}{\partial t} - \frac{\partial S_B}{\partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} [S_{P\beta} + S_{M\beta}]$$

$$\{40\} \quad - [\tau_{\zeta\alpha} + I_{P\zeta} v_\alpha - \tau_{\alpha\zeta} - I_P^\alpha v_\zeta] - [[I_\zeta + I_M^\zeta] v_\alpha - [I_P^\alpha + I_M^\alpha] v_\zeta] = \\ = [\tau_{P\zeta\alpha} + \tau_{M\zeta\alpha}] - [\tau_{P\alpha\zeta} + \tau_{M\alpha\zeta}]$$

$$\{41\} \quad - [\tau_{e\alpha\beta} + \tau_{qe\alpha\beta} - \tau_{i\alpha\beta} - \tau_{qi\alpha\beta}] n_\beta - [\tau_{Be\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}] n_\beta + [I_{Be}^\alpha - I_{Bi}^\alpha] \mathbf{v} \times \mathbf{n} - \\ - [\tau_{Pe\alpha\beta} + \tau_{Me\alpha\beta} - \tau_{Pi\alpha\beta} - \tau_{Mi\alpha\beta}] n_\beta + K_\sigma^\alpha = 0$$

$$\{42\} \quad - v_\alpha [\tau_{e\alpha\beta} + \tau_{qe\alpha\beta}] n_\beta + v_\alpha [\tau_{i\alpha\beta} + \tau_{qi\alpha\beta}] n_\beta - [q_\beta - q_i] n_\beta - [S_{Be\beta} - S_{Bi\beta}] n_\beta + \\ + [W_{Be} - W_{Bi}] \mathbf{v} \times \mathbf{n} - [S_{Pe\beta} + S_{Me\beta} - S_{Pi\beta} - S_{Mi\beta}] n_\beta + N_\sigma = 0$$

$K_{em}^\alpha$  densità di forza sulle cariche della materia

$N_{em}$  densità di potenza ricevuta dalle cariche della materia

Conservazione dell'impulso: {36} bilancio materiale, {37} bilancio elettromagnetico

Conservazione dell'energia: {38}        »        »        , {39}        »        »

{40} Simmetria dell'impulso-energia totale → conservazione del momento d'impulso

$K_\sigma^\alpha$  densità di forza superficiale         $N_\sigma$  densità di potenza superficiale

Le nostre considerazioni si concludono nello schema quadridimensionale di pag. 197.

Cioè la conservazione dell'impulso e dell'energia totali richiede l'esistenza di un tensore impulso-energia totale  $T_{jk}$  soddisfacente alla (24) e, per la conservazione del momento d'impulso, simmetrico (26).

Una sua parte rappresenterà l'impulso e l'energia dello spazio dovuti alla modificazione di questo da parte del campo elettromagnetico  $B_{jk}$  (cioè di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ ) che definisce la forza sulle cariche poste nel campo e quindi il tensore impulso-energia del campo elettromagnetico  $T_{Bjk}$  (17) avente pure l'espressione.

$$[75] \quad T_{Bjk} = - \left[ \varepsilon_0 E_j E_k + \frac{1}{\mu_0} B_j B_k \right] + \left[ \delta_{jk} - \frac{V_j V_k}{ic} \right] \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 E_h E_h + \frac{1}{\mu_0} B_h B_h \right] + \\ + \left[ \frac{V_j}{ic} \eta_{khrv} + \frac{V_k}{ic} \eta_{jhrv} \right] \frac{i}{c} E_h \frac{B_r}{\mu_0} \frac{V_v}{ic} - \frac{V_j V_k}{ic} \frac{1}{ic} \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 E_h E_h + \frac{1}{\mu_0} B_h B_h \right].$$

Esso sintetizza secondo le

$$[76] \quad \begin{cases} T_{B\alpha\beta} = \tau_{B\alpha\beta} & \frac{1}{ic} T_{B\alpha 4} = I_{B\alpha} \\ \frac{c}{i} T_{B4\beta} = S_{B\beta} & - T_{B44} = W_B \end{cases}$$

i tensori tridimensionali  $T_{B\alpha\beta}$ ,  $I_{B\alpha}$ ,  $S_{B\beta}$ ,  $W_B$ , che in base alle {18} {19} {20} {21} dello schema a pag. 198 si costruiscono con  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  indipendentemente dal fatto che essi siano sostenuti da cariche distribuite o raggruppate in dipoli elettrici o magnetici.

$T_{Bjk}$  soddisfa alla relazione

$$[77] \quad - \frac{\partial T_{Bjk}}{\partial x_k} = B_{jh} [J_h + J_{\bar{h}} + J_I],$$

cioè alle [71] [72] che rappresentano il bilancio di impulso e di energia del campo elettromagnetico, unitamente alla analoga relazione superficiale

$$[78] \quad - [T_{Bejk} - T_{Bjek}] N_k = \frac{B_{eh} + B_{eh}}{2} [J_h + J_{\bar{h}} + J_I].$$

Ma la densità di forza-potenza  $B_{ih} [J_h + J_{\bar{h}} + J_I]$  ceduta dal campo elettromagnetico alle cariche e correnti volumetriche anche di polarizzazione e magnetizzazione non è la sola competente a un qualunque volume  $V$  di materia limitato da una superficie ideale  $\sigma$ . Infatti alla materia di  $V$  sono legate anche cariche e correnti uscite (algebricamente) da  $V$  per passare in zona infinita-

mente vicina (e non sono legate al volume adiacente a cui sarebbero a rigore sovrapposte; l'inverso capita in altre zone della superficie), tutte riepilogabili nelle tetracorrenti superficiali su  $\sigma$   $\sigma_{I'j} + \sigma_{jI'}$ : il campo elettromagnetico agir  anche su di esse, e tali azioni saranno pertinenti alla materia contenuta entro  $V$ , perch  quelle cariche sono ad essa legate, cio  fanno parte delle molecole la cui parte restante   contenuta entro  $V$ : di questa trasmissione (per mezzo dei legami che tengono insieme ogni molecola polarizzata e magnetizzata) di forza-potenza che il campo figura cedere a zona infinitamente vicina saranno responsabili i tensori impulso-energia per polarizzazione e per magnetizzazione  $\bar{T}_{jk}$ ,  $\bar{T}_{jk}$ , di modo che la densit  totale di forza-potenza elettromagnetica sar 

$$[79] \quad K_{em} = \frac{dF_{em}}{dV_0} = -\frac{\partial}{\partial x_k} [\bar{T}_{jk} + \bar{T}_{jk} + \bar{T}_{jk}].$$

Nella nostra trattazione trascuriamo l'irraggiamento termico, tenendo conto solo della conduzione-convezione del calore.

Le parti non elettromagnetiche di  $\bar{T}_{jk}$  le separiamo in modo che in un sistema di riferimento in cui il punto considerato   fermo, cio  ha  $V_j = \{0 \ 0 \ 0 \ ic\}$ ,

$\bar{T}_{jk}$  formi le componenti spaziali (sforzi meccanici, dunque ortogonali alla tetravelocit  secondo le (21): nulla vieta che in presenza di polarizzazione e magnetizzazione perdano la simmetria);

$\bar{T}_{jk}$   $[[1/c^2][V_j Q_k + V_k Q_j]$  formi le componenti spazio-temporali (il flusso di energia  $[c/i]\bar{T}_{4\beta} = Q_\beta$  rappresenter , essendo la materia ferma, il flusso di calore, a cui per la simmetria di  $\bar{T}_{jk}$    legata in assenza di polarizzazione e magnetizzazione una densit  d'impulso  $[1/ic]\bar{T}_{\alpha 4} = [1/c^2]Q_\alpha$ :   logico che ci  resti valido sempre, e che quindi  $\bar{T}_{jk}$  si costruisca nel modo visto mediante il tetraflusso di calore  $Q_j$  ortogonale alla tetravelocit  secondo la (22)). La simmetria di  $\bar{T}_{jk}$  impone, per rispettare quella di  $\bar{T}_{jk}$ , che

$$[89] \quad [\bar{T}_{jk} - \bar{T}_{kj}]V_k = 0, \quad [\bar{T}_{jk} - \bar{T}_{kj}]V_k = 0.$$

$C[1 + U/c^2]V_j V_k$  formi la componente temporale (a materia ferma l'impulso-energia per inerzia avr  appunto come unico elemento la densit  di energia della materia  $-C[1 + U/c^2]icic$ ). Dunque  $C[1 + U/c^2]$  sar  la densit  in quiete di massa a riposo e la scriviamo in questa forma perch  in uno stato fisico fondamentale prefissato per cui  $U = 0$  si riduca a  $C$ , invariante che chiamiamo densit  in quiete di materia e il cui variare da quello stato definiamo (geometricamente) imponendo la conservazione della materia (20). Interpretiamo l'invariante  $U$  come energia interna (della quantit  unitaria di materia).

A  $C$  corrisponde tridimensionalmente la densità di materia

$$v = C \frac{dV_0}{dV},$$

per cui

$$[80] \quad C = v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

e la conservazione della materia (20) si scrive {35} (pag. 199): infatti integrando a un volume  $V$  limitato da una superficie  $\sigma$  si ottiene

$$[81] \quad \frac{d}{dt} \int_V v dV = 0,$$

cioè non varia nel tempo l'integrale esteso alla materia in moto del volume  $V$ .

Per analizzare l'effetto delle parti meccanica, termica, ecc., nel bilancio di impulso-energia, osserviamo che per un tensore qualunque  $X_{jk}$  si ha

$$\begin{aligned} -\frac{\partial X_{jk}}{\partial x_k} &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ X_{jk} - X_{j4} \frac{V_k}{V_4} \right] - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ X_{j4} \frac{V_k}{V_4} \right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[ X_{j\beta} - \frac{X_{j4}}{ic} v_\beta \right] - \frac{\partial}{\partial t} \frac{X_{j4}}{ic} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[ \frac{X_{j4}}{ic} v_\beta \right], \end{aligned}$$

e integrando a un volume  $V$  di materia e trasformando col teorema di Green:

$$[82] \quad -\int_V \frac{\partial X_{jk}}{\partial x_k} dV = -\int_\sigma \left[ X_{j\beta} - \frac{X_{j4}}{ic} v_\beta \right] n_\beta d\sigma - \frac{d}{dt} \int_V \frac{X_{j4}}{ic} dV,$$

essendo  $d/dt$  la variazione nell'unità di tempo dell'esteso al volume in moto  $S$ . Vale pure

$$[83] \quad -\int_\sigma \left[ X_{j\beta} - \frac{X_{j4}}{ic} v_\beta \right] n_\beta d\sigma = -\int_\sigma X_{jk} N_k d\sigma_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Applicando ciò a  $T_{jk}$  si ha

$$-\int_V \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} dV = -\int_\sigma \left[ T_{j\beta} - \frac{T_{j4}}{ic} v_\beta \right] n_\beta d\sigma - \frac{d}{dt} \int_V \frac{T_{j4}}{ic} dV,$$

quindi alla trasmissione di forza e potenza attraverso ogni superficie  $\sigma$  (limi-



tante un volume arbitrario  $V$ ), trasmissione rappresentata dal primo termine del secondo membro, consegue necessariamente secondo la relatività la presenza di impulso ed energia immagazzinati nel corpo e in moto con esso, e dalla loro variazione consegue il secondo termine. Dunque  $T_{jk}$  si rappresenterà tridimensionalmente per mezzo del

tensore degli sforzi meccanici 
$$\tau_{\alpha\beta} = T_{F\alpha\beta} - \frac{T_{F\alpha 4}}{V_4} V_\beta,$$

e delle densità di impulso ed energia  $I_{F\alpha}$   $W_F$  ad esso legate dalle {30} {31} di pag. 199 (nulle nei punti fermi):

$$[84] \quad \begin{cases} T_{F\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} + I_{F\alpha} v_\beta & I_{F\alpha} = \frac{1}{ic} T_{F\alpha 4} \\ \frac{c}{i} T_{F4\beta} = \tau_{\alpha\beta} v_\alpha + W_F v_\beta & W_F = - T_{F44}. \end{cases}$$

Notiamo che, per la (21), alle forze  $-\int_{\sigma} \tau_{\alpha j} n_\beta d\sigma$  corrisponde come potenza proprio il loro lavoro nell'unità di tempo  $-\int_{\sigma} \tau_{\alpha\beta} v_\alpha n_\beta d\sigma$ .

Applicando lo stesso teorema a  $T_{jk}$  otteniamo

$$-\int_V \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} dV = -\int_{\sigma} \left[ T_{j\beta} - \frac{T_{j4}}{ic} v_\beta \right] n_\beta d\sigma - \frac{d}{dt} \int_V \frac{T_{j4}}{ic} dV,$$

cioè anche la conduzione termica dà luogo a impulso ed energia immagazzinati nel corpo e in moto con esso, e dà luogo inoltre, in certi casi in cui non sono nulle le componenti spaziali dell' $\int_{\sigma}$ , a sforzi di origine termica.

Perciò facciamo la seguente scomposizione (in parti non tensoriali):

$$[85] \quad T_{jk} = \frac{1}{c^2} [V_j Q_k + V_k Q_j] = \frac{1}{c^2} \left[ V_j + \delta_{j4} \frac{c^2}{V_4} \right] Q_k - \delta_{j4} \frac{Q_k}{V_4} + \frac{1}{c^2} Q_j V_k.$$

Il primo termine moltiplicando per  $V_j$  o  $V_k$  e sommando dà zero come se provenisse da sforzi meccanici, il secondo termine è quello più propriamente termico, il terzo corrisponde a impulso-energia immagazzinati.

Togliamo dal secondo termine una parte corrispondente a energia immagazzinata:

$$-\delta_{j4} \frac{Q_k}{V_4} = -\delta_{j4} \frac{1}{V_4} \left[ Q_k - \frac{Q_4}{V_4} V_k \right] - \delta_{j4} \frac{1}{V_4} \frac{Q_4}{V_4} V_k,$$

e daremo la rappresentazione tridimensionale della conduzione termica per mezzo del vettore

$$\text{flusso di calore} \quad q_\alpha = -\frac{c}{i} \frac{1}{V_4} \left[ Q_\alpha - \frac{Q_4}{V_4} V_\alpha \right]$$

onde il tetraflusso di calore si esprime

$$[86] \quad Q_j = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \{q_x q_y q_z 0\} + V_j \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{c^2 [1-v^2/c^2]}.$$

Dunque la conduzione termica dà luogo a sforzi termici  $\tau_{\alpha\beta}$  {32} e alle densità di impulso  $I_\alpha$  {33} e di energia  $W$  {34}, essendo  $T_{jk}$  compiutamente rappresentato da

$$[87] \quad \begin{cases} T_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} + I_\alpha v_\beta & I_\alpha = \frac{1}{ic} T_{\alpha 4} \\ \frac{c}{i} T_{4\beta} = q_\beta + \tau_{\alpha\beta} v_\alpha + W v_\beta & W = -T_{44}. \end{cases}$$

Notiamo che nei punti fermi sono nulli  $\tau_{\alpha\beta}$  e  $W$ .

Passiamo ora a determinare  $T_{jk}$ ,  $T_{jk}$ . Consideriamo, come dicemmo, un qualunque volume  $V$  di materia limitato da una superficie ideale  $\sigma$ , e teniamo conto con questi tensori delle forze esercitate dal campo elettromagnetico sulle cariche e correnti superficiali di polarizzazione e magnetizzazione che è necessario pensare su  $\sigma$  per completare il sistema di cariche legato alla materia del volume  $V$ . Poichè la superficie è ideale, a tali cariche e correnti superficiali saranno sovrapposte quelle uguali e contrarie ma legate alla materia esterna a  $V$ : questo fa sì che il campo elettromagnetico non subisca discontinuità attraverso la superficie ideale. Dunque sulla superficie il campo eserciterà la forza

$$\begin{aligned} \int_\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \left[ \frac{\mathbf{J}}{\sigma_P} + \frac{\mathbf{J}}{\sigma_M} \right] \wedge \mathbf{B} \right]_\alpha d\sigma &= \int_\sigma \left[ \mathbf{P} \times \mathbf{n} \mathbf{E} + \left[ \mathbf{P} \times \mathbf{n} \mathbf{v} - \mathbf{n} \wedge \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} \right] \wedge \mathbf{B} \right]_\alpha d\sigma = \\ &= \int_\sigma \left[ P_\beta n_\beta E_\alpha + P_\beta n_\beta [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]_\alpha - n_\beta B_\beta \frac{M_\alpha}{\mu_0} + \frac{M_\beta}{\mu_0} B_\beta n_\alpha \right] d\sigma = \\ &= - \int_\sigma [\tau_{P\alpha\beta} + \tau_{M\alpha\beta}] n_\beta d\sigma = - \int_V \frac{\partial [\tau_{P\alpha\beta} + \tau_{M\alpha\beta}]}{\partial x_\beta} dV, \end{aligned}$$

avendo introdotto i flussi d'impulso per cariche superficiali di polarizzazione  $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$  {22} e per correnti superficiali di magnetizzazione  $\mathcal{T}_{M\alpha\beta}$  {26}.

Analogamente, alla superficie il campo trasmetterà la potenza

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \mathbf{E} \times [\mathbf{J}_{\sigma P} + \mathbf{J}_{\sigma M}] d\sigma &= \int_{\sigma} \mathbf{E} \times \left[ \mathbf{P} \times \mathbf{n} \mathbf{v} - \mathbf{n} \wedge \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} \right] d\sigma = \int_{\sigma} \left[ \mathbf{E} \times \mathbf{v} \mathbf{P} \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} \wedge \mathbf{E} \right] d\sigma = \\ &= - \int_{\sigma} [\mathbf{S}_P + \mathbf{S}_M] \times \mathbf{n} d\sigma = - \int_V \operatorname{div} [\mathbf{S}_P + \mathbf{S}_M] dV, \end{aligned}$$

avendo introdotto i vettori flussi di energia per cariche superficiali di polarizzazione  $\mathbf{S}_P$  {24} e per correnti superficiali di magnetizzazione  $\mathbf{S}_M$  {28}.

I corrispondenti tensori quadridimensionali sono definiti dalle

$$[88] \quad -[\mathcal{T}_{jk} + \mathcal{T}_{jk}] N_k = B_{jh} [\mathcal{J}_{\sigma P}^h + \mathcal{J}_{\sigma M}^h],$$

$$[89] [90] \quad [\mathcal{T}_{jk} + \mathcal{T}_{jk} - \mathcal{T}_{kj} - \mathcal{T}_{kj}] V_k = 0 \quad [\mathcal{T}_{jk} + \mathcal{T}_{jk}] V_j V_k = 0.$$

Infatti osserviamo che forza e potenza su  $\sigma$  si riepilogano in

$$\int_{\sigma} B_{jh} [\mathcal{J}_{\sigma P}^h + \mathcal{J}_{\sigma M}^h] d\sigma_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left\{ \begin{aligned} &\int_{\sigma} [\mathcal{Q}_{\sigma P} \mathbf{E} + [\mathbf{J}_{\sigma P} + \mathbf{J}_{\sigma M}] \wedge \mathbf{B}]_{\alpha} d\sigma \\ &\frac{i}{c} \int_{\sigma} \mathbf{E} \times [\mathbf{J}_{\sigma P} + \mathbf{J}_{\sigma M}] d\sigma \end{aligned} \right\}.$$

Per quanto si è visto per un qualunque tensore  $X_{jk}$  sappiamo che

$$- \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} [\mathcal{T}_{jk} + \mathcal{T}_{jk}] dV = - \int_{\sigma} [\mathcal{T}_{jk} + \mathcal{T}_{jk}] N_k d\sigma_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{ic} [\mathcal{T}_{j4} + \mathcal{T}_{j4}] dV.$$

Imporremo perciò che

$$- \int_{\sigma} [\mathcal{T}_{jk} + \mathcal{T}_{jk}] N_k d\sigma_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \int_{\sigma} B_{jh} [\mathcal{J}_{\sigma P}^h + \mathcal{J}_{\sigma M}^h] d\sigma_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

e allora la trattazione relativistica coincide con quella tridimensionale già fatta, e in più mostra l'esistenza di piccoli impulso-energia immagazzinati nel corpo con densità  $[1/ic][\mathcal{T}_{j4} + \mathcal{T}_{j4}]$  e in moto con esso, dovuti alla trasmissione nel corpo di quelle interazioni.

La condizione imposta sarà dunque la [88], cioè

$$-[\bar{T}_{jk} + \bar{T}_{jk}]N_k = B_{jh} \left[ -Y_h V_k + Y_k V_h - \eta_{hkr} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} \right] N_k.$$

Poichè  $V_k N_k = 0$ , tale relazione determina i tensori cercati a meno di una parte  $X_j V_k$ , essendo  $X_j$  un tetravettore per ora arbitrario:

$$\bar{T}_{jk} + \bar{T}_{jk} = B_{jh} \left[ -Y_k V_h + \eta_{hkr} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} \right] + X_j V_k.$$

Questo permette di soddisfare alla [89] preannunciata a pag. 202, che diviene

$$-X_j c^2 - B_{kh} \eta_{hjr} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} V_k - V_j X_k V_k = 0.$$

Essa determina la parte di  $X_j$  ortogonale a  $V_j$ , mentre quella parallela a  $V_j$  resta arbitraria: cioè, con  $A$  arbitrario

$$X_j = -\frac{1}{c^2} B_{kh} \eta_{hjr} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} V_k + A V_j.$$

La parte  $A V_j$  sarebbe luogo al tensore impulso-energia  $A V_i V_k$  che anche se esiste può sempre immaginarsi conglobato col tensore d'inerzia nella parte relativa all'energia interna. Si può dunque scegliere  $A = 0$ , e risulta valida la [90]. Ciò porta come conseguenza che

$$-[\bar{T}_{jk} - \bar{T}_{jk}] \frac{V_j}{ic} \frac{V_k}{ic} = c^2 C \left[ 1 + \frac{U}{c^2} \right],$$

cioè, in un sistema coordinato in cui il punto considerato è fermo, in quel punto tutta l'energia immagazzinata nella materia e in moto con essa (cioè l'energia complessiva meno quella corrispondente al campo elettromagnetico  $B_{jk}$ ) corrisponde al tensore d'inerzia; negli altri sistemi coordinati compare una densità di energia anche negli altri tensori impulso-energia: è strettamente legata alle interazioni superficiali che quei tensori rappresentano ed infatti esprimibile per mezzo di esse e di  $v_\alpha$ .

I tensori cercati sono dunque (18) (19) espressi anche da

$$[91] \quad \bar{T}_{jk} = -E_j Y_k,$$

$$[92] \quad \bar{T}_{jk} = \frac{l_j}{\mu_0} B_k - \left[ \delta_{jk} - \frac{V_j}{ic} \frac{V_k}{ic} \right] \frac{l_h}{\mu_0} B_h - \left[ \frac{V_j}{ic} \eta_{hkr} + \frac{V_k}{ic} \eta_{jhr} \right] \frac{i}{c} E_h \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic}.$$



Si ha pure l'espressione

$$\bar{T}_{jk} + \bar{T}_{jk} = B_{jh} \left[ \frac{1}{\mu_0} B_{hk} - H_{hk} \right] + [B_{jh} H_{hu} - B_{uh} H_{hj}] \frac{V_u}{ic} \frac{V_k}{ic} - B_{hr} \left[ \frac{1}{\mu_0} B_{ru} - H_{ru} \right] \frac{V_h}{ic} \frac{V_u}{ic} \frac{V_j}{ic} \frac{V_k}{ic}$$

deducibile anche direttamente sostituendo nella [88] la

$$J_{\sigma I^h} + J_{\sigma I^h} = - \left[ \frac{1}{\mu_0} B_{hk} - H_{hk} \right] N_k.$$

Per la densità di forza-potenza elettromagnetica applicando la [77] si ha:

$$[93] \quad K_{emj} = - \frac{\partial}{\partial x_k} [\bar{T}_{Bjk} + \bar{T}_{jk} + \bar{T}_{jk}] = B_{jh} J_h + \left[ \frac{\partial B_{jh}}{\partial x_k} Y_k V_h + B_{jh} \frac{\partial [Y_h V_k]}{\partial x_k} \right] + \\ + \frac{\partial B_{jh}}{\partial x_k} \eta_{khr} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ - \frac{1}{c^2} B_{ah} \eta_{hjr} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} V_a V_k \right].$$

Per esprimere tridimensionalmente  $\bar{T}_{jk}$  e  $\bar{T}_{jk}$  occorre anche introdurre le densità di impulso  $\bar{I}_{P\alpha}$ ,  $\bar{I}_{M\alpha}$ , e di energia  $\bar{W}_P$ ,  $\bar{W}_M$ , in moto con la materia ed esprimibili, in grazia delle [89] [90], in funzione dei flussi di impulso e di energia cui corrispondono mediante le {23} {27} {25} {29}. Risultano le relazioni (validi solo così per le somme):

$$[94] \quad \begin{cases} \bar{T}_{\alpha\beta} + \bar{T}_{\alpha\beta} = \bar{\tau}_{P\alpha\beta} + \bar{\tau}_{M\alpha\beta} + [\bar{I}_{P\alpha} + \bar{I}_{M\alpha}] v_\beta & \bar{I}_{P\alpha} + \bar{I}_{M\alpha} = \frac{1}{ic} [\bar{T}_{\alpha 4} + \bar{T}_{\alpha 4}] , \\ \frac{c}{i} [\bar{T}_{4\beta} + \bar{T}_{4\beta}] = \bar{S}_\beta + \bar{S}_\beta + [\bar{W}_P + \bar{W}_M] v_\beta & \bar{W}_P + \bar{W}_M = - [\bar{T}_{44} + \bar{T}_{44}] . \end{cases}$$

Per rappresentare tridimensionalmente  $K_{emj}$  conviene, come si vedrà meglio in seguito, introdurre una densità di forza elettromagnetica  $\bar{K}_{em\alpha}$  e una densità di potenza elettromagnetica  $\bar{N}_{em}$  che tengano conto delle azioni del campo elettromagnetico su tutte le cariche legate a un volume (unitario) di materia e sulle cariche mobili di conduzione contenute in quel volume, ma non delle variazioni di impulso ed energia immagazzinati nella materia per causa della trasmissione delle interazioni di polarizzazione e magnetizzazione. Si definirà dunque

$$[95] \quad \begin{cases} \bar{K}_{em\alpha} = \bar{K}_{em\alpha} + \frac{\partial}{\partial t} [\bar{I}_{P\alpha} + \bar{I}_{M\alpha}] + \frac{\partial}{\partial x_\beta} [\bar{I}_{P\alpha} + \bar{I}_{M\alpha}] v_\beta , \\ \bar{N}_{em} = \frac{c}{i} \bar{K}_{em4} + \frac{\partial}{\partial t} [\bar{W}_P + \bar{W}_M] + \frac{\partial}{\partial x_\beta} [\bar{W}_P + \bar{W}_M] v_\beta . \end{cases}$$

Esse risultano pure espresse da

$$[96] \quad \mathbf{K}_{\text{em}}^\alpha = \left[ \varrho \mathbf{E} + [\varrho \mathbf{v} + \mathbf{J}] \wedge \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_\xi} \mathbf{P}_\xi + \mathbf{v} \wedge \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_\xi} \mathbf{P}_\xi + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_\xi} v_\xi + \mathbf{P} \frac{\partial v_\xi}{\partial x_\xi} \right] \wedge \mathbf{B} \right]_\alpha + \frac{\partial B_\xi}{\partial x_\alpha} \frac{\mathbf{M}_\xi}{\mu_0},$$

$$[97] \quad \mathbf{N}_{\text{em}} = \mathbf{K}_{\text{em}} \times \mathbf{v} + [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}] \times \mathbf{J} + [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}] \times \\ \times \left[ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_\xi} v_\xi + \mathbf{P} \frac{\partial v_\xi}{\partial x_\xi} \right] - \frac{\mathbf{M}}{\mu_0} \times \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_\xi} v_\xi \right].$$

A queste espressioni si sarebbe giunti anche scrivendo direttamente le azioni del campo sulle cariche come si è detto:

$$\mathbf{K}_{\text{em}} \simeq \sum_{\mathbf{W}} \frac{dq_{\mathbf{W}}}{dV} \left[ \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_\xi} l_{\mathbf{W}\xi} \right] + \\ + \frac{dq_{\text{mob}}}{dV} \mathbf{E} + \sum_{\mathbf{W}} \frac{dq_{\mathbf{W}}}{dV} \left[ \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{l}_{\mathbf{W}}}{dt} \right] \wedge \left[ \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_\xi} l_{\mathbf{W}\xi} \right] + \frac{dq_{\text{mob}}}{dV} \mathbf{v}_{\text{mob}} \wedge \mathbf{B},$$

$$\mathbf{N}_{\text{em}} \simeq \sum_{\mathbf{W}} \frac{dq_{\mathbf{W}}}{dV} \left[ \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_\xi} l_{\mathbf{W}\xi} \right] \times \left[ \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{l}_{\mathbf{W}}}{dt} \right] + \frac{dq_{\text{mob}}}{dV} \mathbf{E} \times \mathbf{v}_{\text{mob}},$$

(le azioni sulle cariche legate sono ovviamente la somma delle azioni su ciascuno dei sistemi generici  $\mathbf{W}$  che le costituisce), e sviluppando tali espressioni trascurando i termini in  $l_{\mathbf{W}\alpha} l_{\mathbf{W}\beta}$  e nelle derivate di  $l_{\mathbf{W}\alpha} l_{\mathbf{W}\beta}$  e i termini di ordine superiore e ricordando le definizioni di  $\mathbf{P}$  ed  $\mathbf{M}$  oltre che di  $\varrho$  e  $\mathbf{J}$ .

In definitiva il tensore impulso-energia elettromagnetico complessivo è per noi

$$[98] \quad T_{jk} + T_{jk} + T_{jk} = -B_{jh} H_{hk} - \delta_{jk} \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_0} B_{uh} B_{uh} + \\ + [B_{jh} H_{hu} - B_{uh} H_{hj}] \frac{V_u}{ic} \frac{V_k}{ic} - B_{hr} \left[ \frac{1}{\mu_0} B_{ru} - H_{ru} \right] \frac{V_h}{ic} \frac{V_u}{ic} \frac{V_j}{ic} \frac{V_k}{ic} = \\ = -[E_j D_k + H_j B_k] + \left[ \delta_{jk} - \frac{V_j}{ic} \frac{V_k}{ic} \right] \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 E_h E_h + B_h \left[ 2H_h - \frac{1}{\mu_0} B_h \right] \right] + \\ + \left[ \frac{V_j}{ic} \eta_{khr} + \frac{V_k}{ic} \eta_{jhr} \right] \frac{i}{c} E_h H_r \frac{V_u}{ic} - \frac{V_j}{ic} \frac{V_k}{ic} \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 E_h E_h + \frac{1}{\mu_0} B_h B_h \right].$$

L'ultima espressione mette in evidenza che in un sistema di riferimento in

cui il punto considerato è fermo (e solo in quello) valgono le

$$\tau_{B\alpha} + \tau_{P\alpha i} + \tau_{M\alpha i} = -[E_{\alpha} D_{\beta} + H_{\alpha} B_{\beta}] + \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 E_{\zeta} E_{\zeta} + B_{\zeta} \left[ 2H_{\zeta} - \frac{1}{\mu_0} B_{\zeta} \right] \right],$$

$$\mathbf{I}_B^{\alpha} + \mathbf{I}_P^{\alpha} + \mathbf{I}_M^{\alpha} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}]_{\alpha},$$

$$\mathbf{S}_B + \mathbf{S}_P + \mathbf{S}_M = [\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}]_{\beta}, \quad \mathbf{W}_B + \mathbf{W}_P + \mathbf{W}_M = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 E_{\zeta} E_{\zeta} + \frac{1}{\mu_0} B_{\zeta} B_{\zeta} \right].$$

Per comodità di confronto indichiamo qui con le nostre notazioni le espressioni proposte da diversi autori per il tensore impulso-energia atto a dare, con la sua divergenza cambiata di segno, le forze elettromagnetiche.

Il tensore di Minkowski è

$$\begin{aligned} [99] \quad T_{\text{Mink}}^{jk} &= -B_{jh} H_{hk} - \delta_{jk} \frac{1}{4} B_{uh} H_{uh} = \\ &= -[E_j D_k + H_j B_k] + \left[ \delta_{jk} - \frac{V_j V_k}{ic} \right] \frac{1}{2} [E_h D_h + H_h B_h] + \\ &+ \frac{V_j}{ic} \eta_{khru} \frac{i}{c} E_h H_r \frac{V_u}{ic} + \frac{V_k}{ic} \eta_{jhru} \frac{i}{c} D^2 B_r \frac{V_u}{ic} - \frac{V_j V_k}{ic} \frac{1}{ic} \frac{1}{2} [E_h D_h + H_h B_h], \end{aligned}$$

e ne risulta la densità di forza-potenza elettromagnetica

$$-\frac{\partial T_{\text{Mink}}^{jk}}{\partial x_k} = B_{jh} J_h - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial B_{uh}}{\partial x_j} H_{uh} - \frac{\partial H_{uh}}{\partial x_j} B_{uh} \right].$$

Quello di Abraham è

$$\begin{aligned} [100] \quad T_{\text{Abr}}^{jk} &= T_{\text{Abr}}^{kj} = -\frac{1}{2} [B_{jh} H_{hk} + B_{kh} H_{hj}] - \delta_{jk} \frac{1}{4} B_{uh} H_{uh} + \\ &+ \frac{1}{2} [B_{jh} H_{hu} - B_{uh} H_{hj}] \frac{V_u V_k}{ic} + \frac{1}{2} [B_{kh} H_{hu} - B_{uh} H_{hk}] \frac{V_u V_j}{ic} = \\ &= -\frac{1}{2} [E_j D_k + E_k D_j + H_j B_k + H_k B_j] + \left[ \delta_{jk} - \frac{V_j V_k}{ic} \right] \frac{1}{2} [E_h D_h + H_h B_h] + \\ &+ \left[ \frac{V_j}{ic} \eta_{khru} + \frac{V_k}{ic} \eta_{jhru} \right] \frac{i}{c} E_h H_r \frac{V_u}{ic} - \frac{V_j V_k}{ic} \frac{1}{ic} \frac{1}{2} [E_h D_h + H_h B_h]. \end{aligned}$$

La validità dei tensori di Minkowski o di Abraham viene spesso limitata ai corpi isotropi (in cui  $D_j = \varepsilon E_j$ ,  $B_j = \mu H_j$ ). Quello di Minkowski è stato generalizzato da DÄLLENBACH, senza limitazioni di anisotropia o di isteresi, nella forma:

$$[101] \quad T_{\text{Däll}}^{jk} = -B_{jh} H_{hk} - \delta_{jk} \frac{1}{2} \int_0^{B_{uh}} H_{uh} dB_{uh}.$$

# 7. - Conservazione di impulso, energia, momento d'impulso.

$T_{jk}$  dovrà dunque verificare la conservazione dell'impulso-energia (24) che può anche esplicitarsi così:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( C \left[ 1 + \frac{U}{c^2} \right] V_j V_k \right) &= - \frac{\partial T_{Fjk}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{V_j Q_k + V_k Q_j}{c^2} \right] + K_{emj}, \\ K_{emj} &= - \frac{\partial}{\partial x_k} [T_{Bjk} + T_{Fjk} + T_{Ijk}]. \end{aligned} \right.$$

In notazioni tridimensionali la conservazione dell'impulso si scrive {36} {37}, e integrando a un volume  $V$  limitato da una superficie  $\sigma$  (non di discontinuità):

$$\begin{aligned} [102] \quad \frac{d}{dt} \int_V \frac{v[1 + U/c^2]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v_\alpha dV + \frac{d}{dt} \int_V [I_{F\alpha} + I_{Q\alpha} + I_{P\alpha} + I_{M\alpha}] dV = \\ = - \int_\sigma [\tau_{\alpha\beta} + \tau_{Q\alpha\beta}] n_\beta d\sigma + \int_V K_{em\alpha} dV, \end{aligned}$$

$$[103] \quad \int_V K_{em\alpha} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V I_{B\alpha} dV - \int_\sigma \tau_{B\alpha\beta} n_\beta d\sigma - \int_\sigma [\tau_{P\alpha\beta} + \tau_{M\alpha\beta}] n_\beta d\sigma =$$

$$[104] \quad = \int_V [\varrho + \varrho_P] \mathbf{E} + [\varrho \mathbf{v} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M] \wedge \mathbf{B} dV + \int_\sigma [\varrho_{\sigma P} \mathbf{E} + [\mathbf{J}_{\sigma P} + \mathbf{J}_{\sigma M}] \wedge \mathbf{B}]_\alpha d\sigma.$$

Analogamente la conservazione dell'energia è {38} {39}, e integrando al solito volume  $V$ :

$$\begin{aligned} [105] \quad \frac{d}{dt} \int_V \frac{c^2 v + vU}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dV + \frac{d}{dt} \int_V [W_F + W_Q + W_P + W_M] dV = \\ = - \int_\sigma v_\alpha [\tau_{\alpha\beta} + \tau_{Q\alpha\beta}] n_\beta d\sigma - \int_\sigma q_\beta n_\beta d\sigma + \int_V N dV, \end{aligned}$$

$$[106] \quad \int_V N dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV - \int_\sigma S_{B\beta} n_\beta d\sigma - \int_\sigma [S_{P\beta} + S_{M\beta}] n_\beta d\sigma =$$

$$[107] \quad = \int_V \mathbf{E} \times [\varrho \mathbf{v} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M] dV + \int_\sigma \mathbf{E} \times [\mathbf{J}_{\sigma P} + \mathbf{J}_{\sigma M}] d\sigma.$$

Dalla (24) si trae

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [x_h T_{jk} - x_j T_{hk}] = T_{jh} - T_{hj},$$



onde occorre la simmetria (26) del tensore impulso-energia perchè sia verificata la conservazione del momento d'impulso

$$[108] \quad \frac{\partial}{\partial x_k} [x_h T_{jk} - x_j T_{hk}] = 0.$$

Le stesse cose, esplicitando i diversi tensori, si possono esprimere scindendole, ad esempio, in tre equazioni, di cui le prime due derivano dai bilanci di impulso-energia materiali ed elettromagnetici, e la terza è quella ulteriormente necessaria perchè appunto si conservi il momento d'impulso totale:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ C \left[ 1 + \frac{U}{c^2} \right] x_h V_j V_k - C \left[ 1 + \frac{U}{c^2} \right] x_j V_h V_k \right] &= - \frac{\partial}{\partial x_k} [x_h T_{jk} - x_j T_{hk}] - \\ &\quad - [T_{hj} - T_{jh}] - \frac{\partial}{\partial x_k} [x_h T_{jk} - x_j T_{hk}] + x_h K_{emj} - x_j K_{emh}, \\ x_h K_{emj} - x_j K_{emh} + [T_{hj} - T_{jh}] + [T_{hj} - T_{jh}] &= - \frac{\partial}{\partial x_k} [x_h T_{jk} - x_j T_{hk}] - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_k} [x_h T_{jk} - x_j T_{hk}] - \frac{\partial}{\partial x_k} [x_h T_{jk} - x_j T_{hk}], \\ - [T_{hj} - T_{jh}] &= [T_{hj} - T_{jh}] + [T_{hj} - T_{jh}]. \end{aligned} \right.$$

La prima equazione dice che va in momento d'impulso d'inerzia solo quello delle forze di volume: in particolare di quella corrispondente a  $T_{jk}$ , cioè il momento d'impulso totale dovuto alle forze di superficie espresse dal tensore diminuito della sua coppia meccanica distribuita con densità volumetrica  $T_{hj} - T_{jh}$ ;

la seconda dice che il momento d'impulso ceduto dal campo elettromagnetico (alle cariche e correnti manifestantisi in un qualunque volume e relativa superficie ideale) dà luogo al momento d'impulso della forza elettromagnetica di volume e a una coppia distribuita nel volume;

la terza dice che a questa coppia distribuita è uguale e contraria quella meccanica, risultando così verificata la conservazione del momento.

Tale ultima equazione, che è poi la (26), permette di ricavare sempre la parte antisimmetrica di  $T_{jk}$ :

$$[109] \quad \frac{1}{2} [T_{jk} - T_{kj}] = \frac{1}{2} [E_j Y_k - E_k Y_j] + \frac{1}{2} \left[ -\frac{l_j}{\mu_0} B_k - \frac{l_k}{\mu_0} B_j \right].$$

Tridimensionalmente, alle equazioni dei momenti d'impulso che si traggono dalle {36} {37} va aggiunta, per assicurare la conservazione, la {40} che corri-

sponde alla (26). Integrandole al solito volume  $V$ :

$$\begin{aligned}
 [110] \quad & \frac{d}{dt} \int_V \frac{v[1 + U/c^2]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} [x_\zeta v_\alpha - x_\alpha v_\zeta] dV + \\
 & + \frac{d}{dt} \int_V [x_\zeta [I_\alpha + I_\alpha + I_\beta + I_\gamma] - x_\alpha [I_\beta + I_\beta + I_\gamma + I_\gamma]] dV = \\
 = & - \int_\sigma [x_\zeta [\tau_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}] n_\beta d\sigma - x_\alpha [\tau_{\zeta\beta} + \tau_{\zeta\beta}] n_\beta d\sigma] - \int_V [\tau_{\zeta\alpha} + I_\beta v_\alpha - \tau_{\alpha\zeta} - I_\beta v_\zeta] dV - \\
 & - \int_V [[I_\beta + I_\beta] v_\alpha - [I_\beta + I_\beta] v_\zeta] dV + \int_V [x_\zeta K_{em\alpha} - x_\alpha K_{em\zeta}] dV,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [111] \quad & \int_V [[\tau_{P\alpha} + \tau_{M\alpha}] - [\tau_{P\zeta} + \tau_{M\zeta}]] dV + \int_V [x_\zeta K_{em\alpha} - x_\alpha K_{em\zeta}] dV = \\
 = & - \frac{\partial}{\partial t} \int_V [x_\zeta I_\alpha - x_\alpha I_\zeta] dV - \int_\sigma [x_\zeta \tau_{\alpha\beta} - x_\alpha \tau_{\zeta\beta}] n_\beta d\sigma - \int_\sigma [x_\zeta [\tau_{P\alpha} + \tau_{M\alpha}] - x_\alpha [\tau_{P\zeta} + \tau_{M\zeta}]] n_\beta d\sigma =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [112] \quad & = \int_V [x_\zeta [\varrho + \varrho_P] \mathbf{E} + [\varrho \mathbf{v} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M] \wedge \mathbf{B}]_\alpha - \\
 & - x_\alpha [[\varrho + \varrho_P] \mathbf{E} + [\varrho \mathbf{v} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M] \wedge \mathbf{B}]_\zeta] dV + \\
 & + \int_\sigma [x_\zeta [\varrho_{\sigma P} \mathbf{E} + [\mathbf{J}_{\sigma P} + \mathbf{J}_{\sigma M}] \wedge \mathbf{B}]_\alpha - x_\alpha [\varrho_{\sigma P} \mathbf{E} + [\mathbf{J}_{\sigma P} + \mathbf{J}_{\sigma M}] \wedge \mathbf{B}]_\zeta] d\sigma,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [113] \quad & - \int_V [\tau_{\zeta\alpha} + I_\beta v_\alpha - \tau_{\alpha\zeta} - I_\beta v_\zeta] dV - \int_V [[I_\beta + I_\beta] v_\alpha - [I_\beta + I_\beta] v_\zeta] dV = \\
 & = \int_V [[\tau_{P\alpha} + \tau_{M\alpha}] - [\tau_{P\zeta} + \tau_{M\zeta}]] dV.
 \end{aligned}$$

Accenniamo appena al comportamento del tensore impulso-energia su di una superficie materiale di discontinuità, cioè di separazione fra due mezzi materiali. Tale comportamento, corrispondente al caso limite di un passaggio graduale, è definito dalla (25). Il termine  $K_{\sigma j}$ , se c'è, rappresenta la densità di forza-potenza superficiale dovuta a tensioni superficiali e corrispondente energia interna. Tridimensionalmente si rappresenta mediante le densità di forza superficiale  $K_{\sigma\alpha}$  e di potenza superficiale  $N_{\sigma}$  dovute a quelle cause:

$$[114] \quad K_{\sigma j} = \frac{1}{\sqrt{1 - [v/c] \times n]^2}} \left\{ K_{\sigma^x} K_{\sigma^y} K_{\sigma^z} \frac{i}{c} N_{\sigma} \right\}.$$

La (25) si può anche sviluppare nella seguente:

$$[115] \quad - \left[ \frac{T_{F_e^{jk}}}{F_e^{jk}} - \frac{T_{F_i^{jk}}}{F_i^{jk}} + \frac{1}{e^2} V_j Q_e^k - \frac{1}{e^2} V_i Q_i^k \right] N_k + \frac{B_{jh} + B_{ih}}{2} J_h - \\ - N_j [B_{hu} - B_{iu}] N_u \frac{1}{2} \left[ V_h Y_e^k + V_i Y_i^k + \eta_{hkra} \left[ \frac{V_r}{ic} \frac{l_a}{\mu_0} + \frac{V_i}{ic} \frac{l_a}{\mu_0} \right] \right] N_k + K_j = 0.$$

In forma tridimensionale si ha la {41} per la densità di forza superficiale, e la {42} per la densità di potenza superficiale.

### 8. - Differenziale dell'energia interna.

La (24) rappresenta pure l'equazione fondamentale della meccanica, e può anche scriversi

$$-\frac{\partial T_{F^{jk}}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{V_j Q_k + V_k Q_j}{e^2} \right] + K_{em}^j = C V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left[ 1 + \frac{U}{e^2} \right] V_j \right] = C e \frac{d}{ds} \left[ \left[ 1 + \frac{U}{e^2} \right] V_j \right].$$

Da ciò moltiplicando per  $V_j$  e sommando su  $j$  ricordando che

$$V_j V_j = -e^2 \quad \text{e quindi} \quad V_j \frac{\partial V_j}{\partial x_k} = 0:$$

$$C \frac{\partial U}{\partial x_k} V_k = C e \frac{dU}{ds} = V_j \left[ \frac{\partial T_{F^{jk}}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{V_j Q_k + V_k Q_j}{e^2} \right] - B_{jh} J_h - \right. \\ \left. - \left[ \frac{\partial B_{jh}}{\partial x_k} Y_k V_h + B_{jh} \frac{\partial [Y_h V_k]}{\partial x_k} \right] - \frac{\partial B_{jh}}{\partial x_k} \eta_{khru} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ -\frac{1}{e^2} B_{ah} \eta_{hiru} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} V_a V_k \right] \right].$$

Osserviamo che

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial T_{F^{jk}}}{\partial x_k} V_j = 0 & \text{quindi} \quad \frac{\partial T_{F^{jk}}}{\partial x_k} V_j + T_{F^{jk}} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} = 0; \\ Q_j V_j = 0 & \gg \quad \frac{\partial Q_j}{\partial x_k} V_j + Q_j \frac{\partial V_j}{\partial x_k} = 0; \\ \frac{\partial [C V_j]}{\partial x_j} = 0 & \gg \quad \frac{\partial C}{\partial x_j} V_j + C \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0; \end{array}$$

$$V_j B_{ah} \eta_{hiru} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} V_a V_k = 0,$$

quindi

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_k} B_{ah} \eta_{hiru} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} V_a V_k + V_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ B_{ah} \eta_{hiru} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} V_a V_k \right] = 0.$$

Inoltre vale

$$\frac{\partial B_{jh}}{\partial x_k} \eta_{khr} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial B_{jh}}{\partial x_k} - \frac{\partial B_{jk}}{\partial x_h} \right] \eta_{khr} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_{hk}}{\partial x_j} \eta_{khr} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{V_u}{ic}.$$

Applicando tutto ciò risulta

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} = & -\frac{1}{C} T_{jk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \frac{1}{C} \left[ \frac{\partial Q_k}{\partial x_k} + \frac{1}{c^2} V_k Q_j \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right] + \frac{1}{C} B_{hj} V_j J_h + \\ & + \frac{1}{C} B_{hj} V_j \left[ \frac{\partial Y_h}{\partial x_k} V_k - Y_h \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial x_k} V_k \right] + \frac{1}{C} \frac{l_r}{\mu_0} V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \eta_{khr} B_{hk} \frac{V_u}{ic} \right] - \\ & - \frac{1}{C} \eta_{khr} \frac{l_r}{\mu_0} \frac{1}{ic} \frac{\partial V_u}{\partial x_j} V_j \left[ \frac{1}{2} B_{hk} + \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} B_{ha} V_a V_k - \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} B_{ka} V_a V_h \right]. \end{aligned}$$

Consideriamo l'ultimo termine: nella sommatoria ogni volta uno degli indici di  $\eta_{khr}$  deve essere 4, ma poichè in un sistema di riferimento in cui  $V_j = \{0 \ 0 \ 0 \ ic\}$  hanno componenti 4 nulle sia  $l_r/\mu_0$  sia  $[C V_u/\partial x_j] V_j$  sia il tensore fra parentesi, risulta che quel termine è nullo. Resta:

$$\begin{aligned} [116] \quad c \frac{dU}{ds} = & \frac{\partial U}{\partial x_k} V_k = -\frac{1}{C} T_{jk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \frac{1}{C} \left[ \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} V_k Q_j \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right] + \\ & + \frac{1}{C} E_j J_j + E_j V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{Y_j}{C} \right] - \frac{1}{\mu_0} \frac{l_j}{C} \frac{\partial B_j}{\partial x_k} V_k. \end{aligned}$$

Questa espressione fornisce il differenziale  $dU$  dell'energia interna. Mostriamo in un prossimo lavoro come esso possa esprimersi in funzione dei differenziali di variabili di stato fisico, introducendo il tensore delle deformazioni e le componenti dei vettori elettrici in opportuni riferimenti: si stabilisce così una relazione, corrispondente al I principio della termodinamica in fisica classica, su cui può costruirsi la teoria del corpo reversibile.

Qui cercheremo di fare la sistemazione dei termini termici: i termini in  $Q_j$  corrispondono al calore ricevuto per conduzione, quello in  $J_j$  al calore formato per effetto Joule. Accanto all'energia interna  $U$  si dovranno introdurre gli invarianti entropia (sempre della quantità unitaria di materia)  $Z$ , e temperatura assoluta in quiete  $T$ . Allora  $Tc[dZ/ds]$  dovrà comprendere tutti i termini termici: quelli già ricordati e quelli corrispondenti al calore formatosi per altri fenomeni irreversibili: lavoro di sforzi meccanici dissipativi (attriti interni), isteresi dielettrica e magnetica.

Ci limiteremo ad esprimere  $Tc[dZ/ds]$  lasciando da parte le isteresi e supponendo che gli sforzi meccanici dissipativi costituiscano degli sforzi irreversibili  $T_{Firrjk}$  che si sovrappongono a quelli reversibili  $T_{Frevjk}$  secondo la (27) (pag. 216), cui corrisponde la tridimensionale {43}.

Così in un fluido viscoso gli sforzi  $T_{Frevjk}$  sono quelli di pressione e i  $T_{Firrjk}$  quelli dovuti alla viscosità.



Con tali limitazioni scriviamo

$$[117] \quad T e \frac{dZ}{ds} = T \frac{\partial Z}{\partial x_j} V_j = -\frac{1}{C} T_{\text{irr}jk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \frac{1}{C} \left[ \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} V_k Q_j \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right] + \frac{1}{C} E_j J_j,$$

che energeticamente corrisponde a

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} T \left[ \frac{\partial Z}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial Z}{\partial x_{\alpha}} v_{\alpha} \right] = \frac{1}{v} \left[ \frac{e}{i} \sum_k \left[ -\frac{\partial T_{\text{irr}4k}}{\partial x_k} - \frac{\partial T_{\text{e}4k}}{\partial x_k} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{\alpha} v_{\alpha} \sum_k \left[ -\frac{\partial T_{\text{irr}\alpha k}}{\partial x_k} - \frac{\partial T_{\text{e}\alpha k}}{\partial x_k} \right] \right] + \frac{1}{v} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}] \times \mathbf{J}, \end{aligned}$$

da cui si trae la {44} e si vede che con velocità qualsiasi il ruolo di temperatura assoluta è tenuto da  $T\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Per scrivere il II principio della termodinamica osserviamo che risulta

$$C \frac{\partial Z}{\partial x_j} V_j = \frac{\partial [CZV_j]}{\partial x_j} = -\frac{1}{T} T_{\text{irr}jk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \frac{1}{T} \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} - \frac{1}{T} \frac{1}{c^2} V_k Q_j \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{1}{T} E_j J_j,$$

quindi la (28): appare logico che il II principio escluda secondo la (29) che tale espressione sia negativa.

(27)

$$T_{jk} = T_{\text{rev}jk} + T_{\text{irr}jk}$$

(28)

$$-\frac{1}{T} T_{\text{irr}jk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \frac{1}{T^2} Q_j \left[ \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} T \frac{\partial V_j}{\partial x_k} V_k \right] + \frac{1}{T} E_j J_j =$$

(29)

$$= \frac{\partial [CZV_j]}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{Q_j}{T} \right] \geq 0$$

{43}

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\text{rev}\alpha\beta} + \tau_{\text{irr}\alpha\beta}$$

{44}

$$\begin{aligned} T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[ \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x_{\alpha}} v_{\alpha} \right] = \frac{1}{v} \left[ -[\tau_{\text{irr}\alpha\beta} + \tau_{\text{e}\alpha\beta}] \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} - \frac{\partial q_{\beta}}{\partial x_{\beta}} - \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} [W_{\text{irr}} v_{\beta} + W_{\text{e}} v_{\beta}] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial t} [W_{\text{irr}} + W_{\text{e}}] + v_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} [I_{\text{irr}\alpha} v_{\beta} + I_{\alpha} v_{\beta}] + v_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [I_{\text{irr}\alpha} + I_{\alpha}] + [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}] \times \mathbf{J} \right] \end{aligned}$$

{45}

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ vZ + \frac{1}{T\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{c^2 [1 - v^2/c^2]} \right] + \\ + \text{div} \left[ \left[ vZ + \frac{1}{T\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{c^2 [1 - v^2/c^2]} \right] \mathbf{v} \right] \geq - \text{div} \frac{\mathbf{q}}{T\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Il II principio (29) ha l'espressione tridimensionale {45}, e integrando a un volume  $V$  limitato da una superficie  $\sigma$ :

$$[118] \quad \frac{d}{dt} \int_V \left[ rZ + \frac{1}{T\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{c^2[1-v^2/c^2]} \right] dV = \int_{\sigma} \frac{1}{T\sqrt{1-v^2/c^2}} \mathbf{q} \times [-\mathbf{n}] d\sigma.$$

Cioè l'aumento di entropia immagazzinata in  $V$  è uguale (se tutti fenomeni reversibili) o maggiore (per i fenomeni irreversibili) all'entropia entrata col flusso di calore attraverso  $\sigma$ . La densità di entropia consta di due termini, il secondo dei quali è nullo per  $\mathbf{q} = 0$  quindi all'equilibrio termico ed è nullo pure nei punti fermi: esso è uguale al primo termine di  $\bar{W}_Q$  (cioè quello che non corrisponde nè a  $T_{Q\alpha\beta}$  nè a  $Q_j V_k / c^2$ , ma è associato a  $\mathbf{q}$  in  $-\partial_{j4} Q_k / V_4$ ) diviso per  $T\sqrt{1-v^2/c^2}$ .

Nelle condizioni dianzi indicate si avrà dunque

$$[119] \quad c \frac{dU}{ds} = -\frac{1}{C} T_{\text{rev}}{}^{jk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + Tc \frac{dZ}{ds} + E_j c \frac{d}{ds} \left[ \frac{Y_j}{C} \right] - \frac{1}{\mu_0} \frac{l_j}{C} c \frac{dB_j}{ds}.$$

## 9. - Fluido reversibile.

Nel lavoro in cui faremo la teoria generale del corpo reversibile tratteremo il fluido reversibile come caso particolare. Ma lo accenneremo anche qui, data la sua semplicità, perchè lo sviluppo almeno di un caso particolare come questo è necessario a chiarire il significato che attribuiamo alle varie parti del tensore impulso-energia totale e l'accordo con le teorie energetiche correnti.

Il fluido reversibile è un materiale isotropo nel quale non ci siano tensioni tangenziali, in cui quindi, indicando con  $p$  la pressione:

$$T_{\text{rev}}{}^{jk} = p \left[ \delta_{jk} - \frac{V_j}{ic} \frac{V_k}{ic} \right],$$

cioè

$$[120] \quad \tau_{\text{rev}}{}^{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta}.$$

Risulta allora

$$[121] \quad -\frac{1}{C} T_{\text{rev}}{}^{jk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{C} p \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = \frac{1}{C} p \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial x_j} V_j = -p V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{C} \right] = -p \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{C} \right],$$

$$dU = -p d \frac{1}{C} + T dZ + E_j d \left[ \frac{Y_j}{C} \right] - \frac{1}{\mu_0} \frac{l_j}{C} dB_j.$$

$dU$  deve essere un differenziale esatto.

Come variabili individuanti lo stato fisico vogliamo scegliere gli invarianti

$$C, \quad T, \quad \sum_j E_j^2, \quad \sum_j B_j^2,$$

per cui conviene introdurre la funzione invariante  $L$  (30). Infatti

$$dL = dU - T dZ - Z dT - E_j d\left[\frac{Y_j}{C}\right] - \frac{Y_j}{C} dE_j = -p d\frac{1}{C} - Z dT - \frac{Y_j}{C} dE_j - \frac{1}{\mu_0} \frac{l_j}{C} dB_j.$$

Poichè  $T_{\text{prev}jk}$  è simmetrico, dovranno esserlo pure  $T_{jk}$  e  $T_{jk}$ , quindi

$$-E_j Y_k + E_k Y_j = 0 \quad \text{da cui} \quad E_j E_j Y_k = E_j Y_j E_k,$$

$$\frac{l_j}{\mu_0} B_k - \frac{l_k}{\mu_0} B_j = 0 \quad \text{da cui} \quad l_j B_k B_k = l_k B_k B_j,$$

cioè  $Y_j$  sarà proporzionale a  $E_j$  e  $l_j$  a  $B_j$ : (35), (37). Perciò

$$\begin{aligned} dL &= -p d\frac{1}{C} - Z dT - \frac{1}{C} [\varepsilon - \varepsilon_0] E_j dE_j - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{C} \left[1 - \frac{\mu_0}{\mu}\right] B_j dB_j = \\ [122] \quad &= -p d\frac{1}{C} - Z dT - \frac{1}{C} [\varepsilon - \varepsilon_0] \frac{1}{2} d\left[\sum_j E_j^2\right] - \frac{1}{C} \left[\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right] \frac{1}{2} d\left[\sum_j B_j^2\right]. \end{aligned}$$

$L$  può dunque avere un'espressione qualsiasi (31) e determina tutte le altre grandezze: infatti perchè il  $dL$  [122] sia un differenziale esatto devono valere le (33) (34) (36) (38).

(30) (31)

$$\text{Fluido reversibile } L = U - TZ - E_j \frac{Y_j}{C} = L(C, T, \sum_j E_j^2, \sum_j B_j^2)$$

(32) (33) (34)

$$T_{\text{rev}jk} = p \left[ \delta_{jk} - \frac{V_j}{ic} \frac{V_k}{ic} \right] \quad p = - \frac{\partial L}{\partial [1/C]} \quad Z = - \frac{\partial L}{\partial T}$$

(35) (36)

$$Y_j = [\varepsilon - \varepsilon_0] E_j \quad \varepsilon - \varepsilon_0 = -2C \frac{\partial L}{\partial \sum_j E_j^2}$$

(37) (38)

$$l_j = \left[1 - \frac{\mu_0}{\mu}\right] B_j \quad \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} = -2C \frac{\partial L}{\partial \sum_j B_j^2}$$

(39)

Fluido reversibile a coefficienti indipendenti dai campi

$$L = L_0(C, T) - \frac{1}{C} [\varepsilon(C, T) - \varepsilon_0] \frac{1}{2} \sum_j E_j^2 + \frac{1}{C} \left[ \frac{1}{\mu(C, T)} - \frac{1}{\mu_0} \right] \frac{1}{2} \sum_j B_j^2$$

Naturalmente risulta pure, dalle (33), (30), (35), (37):

$$[123] \quad [124] \quad p = C^2 \frac{\partial L}{\partial C} \quad U = L + TZ + E_j \frac{Y_j}{C}$$

$$[125] \quad [126] \quad D_j = \varepsilon E_j, \quad H_j = \frac{1}{\mu} B_j$$

e quindi dalla definizione di  $H_{jk}$ :

$$[127] \quad H_{jk} = \frac{1}{\mu} B_{jk} - ic \left[ \varepsilon - \frac{1}{\mu c^2} \right] \left[ B_{jh} V_h \frac{V_k}{ic} - B_{kh} V_h \frac{V_j}{ic} \right],$$

che è il legame usato da tutti gli autori nel caso del fluido.

$p$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  sono invarianti funzioni delle 4 variabili di stato e rappresentano la pressione, la costante dielettrica e la permeabilità magnetica.

$\varepsilon$  e  $\mu$  hanno più propriamente tali nomi quando sono indipendenti dai campi elettromagnetici. Parleremo allora di fluido reversibile a coefficienti indipendenti dai campi. Le sue proprietà sono individuate dalle tre funzioni  $L_0(C, T)$ ,  $\varepsilon(C, T)$ ,  $\mu(C, T)$ , con cui si costruisce la  $L$  (39) che si può pensare ottenuta sviluppando in serie di Mac-Laurin come funzione di  $\sum_j E_j^2$  e  $\sum_j B_j^2$ , e arrestando lo sviluppo ai primi termini. Perciò questa teoria può essere valida per qualunque fluido reversibile purchè soggetto a campi elettromagnetici piccoli. Da  $L$  si ricavano nel noto modo le altre grandezze:

$$[128] \quad p = C^2 \frac{\partial L_0(C, T)}{\partial C} + \left[ -C \frac{\partial \varepsilon(C, T)}{\partial C} + \varepsilon(C, T) - \varepsilon_0 \right] \frac{1}{2} \sum_j E_j^2 + \\ + \left[ -\frac{C}{\mu^2(C, T)} \frac{\partial \mu(C, T)}{\partial C} + \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu(C, T)} \right] \frac{1}{2} \sum_j B_j^2,$$

$$[129] \quad Z = -\frac{\partial L_0(C, T)}{\partial T} + \frac{1}{C} \frac{\partial \varepsilon(C, T)}{\partial T} \frac{1}{2} \sum_j E_j^2 + \frac{1}{C} \frac{1}{\mu^2(C, T)} \frac{\partial \mu(C, T)}{\partial T} \frac{1}{2} \sum_j B_j^2,$$

$$[130] \quad Y_j = [\varepsilon(C, T) - \varepsilon_0] E_j,$$

$$[131] \quad I_j = \left[ 1 - \frac{\mu_0}{\mu(C, T)} \right] B_j,$$

$$[132] \quad U = L_0(C, T) - T \frac{\partial L_0(C, T)}{\partial T} + \frac{1}{C} \left[ \varepsilon(C, T) - \varepsilon_0 + T \frac{\partial \varepsilon(C, T)}{\partial T} \right] \frac{1}{2} \sum_j E_j^2 + \\ + \frac{1}{C} \left[ \frac{1}{\mu(C, T)} - \frac{1}{\mu_0} + T \frac{1}{\mu^2(C, T)} \frac{\partial \mu(C, T)}{\partial T} \right] \frac{1}{2} \sum_j B_j^2.$$

Il termine della pressione in  $\partial \varepsilon(C, T) / \partial C$  rappresenta l'elettrostrizione; quello in  $\partial \mu(C, T) / \partial C$  la magnetostrizione.

# 10. - Fenomeni irreversibili in un corpo isotropo.

Le leggi che regolano i fenomeni irreversibili dovranno soddisfare al II principio della termodinamica (29) che per la (28), e per la simmetria di  $T_{\text{irr}jk}$  in assenza di polarizzazioni e magnetizzazioni irreversibili, può scriversi aggiungendo termini nulli:

$$[133] \quad -\frac{1}{T} T_{\text{irr}jk} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_u} + \frac{\partial V_u}{\partial x_j} \right] V_u V_k + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial V_k}{\partial x_u} + \frac{\partial V_u}{\partial x_k} \right] V_u V_j \right] - \\ - \frac{1}{T^2} Q_j \left[ \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} V_j \frac{\partial T}{\partial x_k} V_k + \frac{1}{c^2} T \frac{\partial V_j}{\partial x_k} V_k \right] + \frac{1}{T} E_j \left[ J_j + V_j \frac{1}{c^2} J_k V_k \right] \geq 0.$$

In assenza di fenomeni termoelettrici e di forze elettromotrici chimico-fisiche, si può supporre che in un corpo isotropo valgano le leggi (40), cioè {46}, per gli sforzi di viscosità, (41), cioè {47}, per la conduzione termica, (42), cioè {48}, per la conduzione elettrica (legge di Ohm).

$$(40) \quad T_{\text{irr}jk} = -\eta_I \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_u} + \frac{\partial V_u}{\partial x_j} \right] V_u V_k + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial V_k}{\partial x_u} + \frac{\partial V_u}{\partial x_k} \right] V_u V_j - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \frac{\partial V_h}{\partial x_h} \left[ \delta_{jk} - \frac{V_h V_k}{ic ic} \right] \right] - \eta_{II} 2 \frac{\partial V_h}{\partial x_h} \left[ \delta_{jk} - \frac{V_j V_k}{ic ic} \right]$$

$$(41) \quad Q_j = -\gamma_t \left[ \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} V_j \frac{\partial T}{\partial x_k} V_k + \frac{1}{c^2} T \frac{\partial V_j}{\partial x_k} V_k \right]$$

$$(42) \quad J_j + V_j \frac{1}{c^2} J_k V_k = \gamma E_j$$

$$\{46\} \quad \tau_{\text{irr}\alpha\beta} = -\eta_I \left[ \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left[ \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right] + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \right. \\ + \frac{1}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} \left[ \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\zeta} v_\zeta + \frac{\partial v_\beta}{\partial t} \right] \frac{v_\alpha}{1-v^2/c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} v_\beta + \\ + \frac{1}{c^2} v_\alpha v_\beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{2}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\zeta} \frac{v_\zeta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] \delta_{\alpha\beta} \Big] - \\ - \eta_{II} 2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_\zeta} \frac{v_\zeta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] \delta_{\alpha\beta}$$

$$\{47\} \quad q_\alpha = -\gamma_t \sqrt{1-v^2/c^2} \left[ \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \frac{v_\alpha}{c^2} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{c^2} T \frac{1}{1-v^2/c^2} \left[ \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} v_\beta \right] \right]$$

$$\{48\} \quad \mathbf{J} + \mathbf{v} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{v}}{c^2 [1-v^2/c^2]} = \gamma \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]$$



Infatti il II principio [133] risulta sempre soddisfatto qualunque siano i valori, purchè positivi, dei coefficienti funzioni di stato

$\eta_I, \eta_{II}$  coefficienti di viscosità,

$\gamma_t$  conducibilità termica,

$\gamma$  conducibilità elettrica,

poichè la [133] diviene allora

$$\begin{aligned}
 [134] \quad & \frac{1}{T} \frac{\eta_I}{2} \sum_{jk} \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial V_j}{\partial x_u} + \frac{\partial V_u}{\partial x_j} \right] V_u V_k + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial V_k}{\partial x_u} + \frac{\partial V_u}{\partial x_k} \right] V_u V_j - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{3} \frac{\partial V_h}{\partial x_h} \left[ \delta_{jk} - \frac{V_j V_k}{ic ic} \right]^2 + \frac{1}{T} \eta_{II} 2 \left[ \frac{\partial V_h}{\partial x_h} \right]^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{T^2} \gamma_t \sum_j \left[ \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} V_j \frac{\partial T}{\partial x_k} V_k + \frac{1}{c^2} T \frac{\partial V_j}{\partial x_k} V_k \right]^2 + \frac{1}{T} \gamma \sum_j E_j^2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

il cui primo membro si riduce, in un riferimento in cui il punto considerato è fermo, a una somma certo positiva di quadrati di componenti spaziali certo reali.

Il terzo termine di  $Q_j$  (41), piccolo termine aggiunto dalla relatività, è nullo quando è nulla la tetraaccelerazione: deriva dal termine  $[1/c^2] V_k Q_j$  in  $\bar{T}_{jk}$ , può interpretarsi come conduzione termica per inerzia (per la forza d'inerzia in un corpo accelerato).

In un fluido perchè non esista attrito interno in una dilatazione isotropa deve essere

$$\bar{T}_{jj} = 3p \quad \text{cioè} \quad \bar{T}_{II jj} = 0 \quad \text{quindi} \quad \eta_{II} = 0.$$

## 11. - Conclusione.

La forza-potenza elettromagnetica da noi ricavata è in completo accordo con la teoria elettronica, come si riassume nella

$$\begin{aligned}
 [135] \quad & \int_V K_j dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} [\bar{T}_{Bjk} + \bar{T}_{Fjk} + \bar{T}_{jk}] dV = \\
 & = \int_V B_{jh} [J_h + \bar{J}_h + \bar{J}_h] dV + \int_\sigma B_{jh} \left[ \frac{J_{\sigma I^h}}{\sigma_I^h} + \frac{J_{\sigma I^h}}{\sigma_I^h} \right] d\sigma_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{ic} [\bar{T}_{j4} + \bar{T}_{j4}] dV.
 \end{aligned}$$

Viene così a mancare nel nostro  $\bar{T}_{jk} + \bar{T}_{jk} + \bar{T}_{jk}$  [98] rispetto al tensore di Minkowski [99] una pressione elettronicamente ingiustificata, ma che, giustificata energeticamente, noi ritroviamo negli sforzi meccanici: così nel fluido reversibile a coefficienti indipendenti dai campi costituisce il termine

$$\left[ \delta_{jk} - \frac{V_j}{ic} \frac{V_k}{ic} \right] \left[ [\varepsilon(C, T) - \varepsilon_0] \frac{1}{2} \sum_j E_j^2 + \left[ \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu(C, T)} \right] \frac{1}{2} \sum_j B_j^2 \right].$$

Abbiamo approfittato dell'arbitrarietà lasciata dalla [135], cioè dalla [88], per imporre la [89] e poter compensare così la dissimmetria, quando c'è, dell'impulso-energia per polarizzazione e magnetizzazione con quella dei soli sforzi meccanici secondo la [109]. Perciò il nostro tensore, a somiglianza di quello di Abraham [100], possiede in più di quello di Minkowski la parte

$$\frac{V_k}{ic} \eta_{jhrs} \frac{i}{c} [E_h H_r - c^2 D_h B_r] \frac{V_u}{ic}.$$

Realizzando ciò nel tensore da noi proposto, ne risulta che con esso tutte le varie parti dell'impulso-energia hanno simmetria nelle componenti miste spazio-temporali in un riferimento in cui il punto considerato è fermo.

Il tensore di Minkowski richiederà comunque la presenza in un altro tensore parziale almeno della parte antisimmetrica di quel termine che gli manca.

Così PAM MAU QUAN nella sua teoria relativistica di un fluido soggetto anche a polarizzazione e magnetizzazione (teoria limitata al fluido) accetta il tensore di Minkowski e per compensarne l'asimmetria è costretto a introdurre uno strano tensore che chiama di interazione fra materia e campo a cui dà l'espressione (con le nostre notazioni)

$$\frac{V_j}{ic} \eta_{jhrs} \frac{i}{c} [c^2 \varepsilon \mu - 1] E_h H_r \frac{V_u}{ic}$$

(che vale a fornire la voluta compensazione dell'asimmetria e ad annullarsi nel vuoto, ma non a dare significato all'esistenza di tale tensore). La sua teoria relativistica della conduzione del calore differisce leggermente dalla nostra. La nostra combina invece nella formulazione quadridimensionale con quella di Eckart, ne è però stata ricavata indipendentemente e contiene inoltre l'equivalente formulazione tridimensionale e la considerazione di un secondo coefficiente di viscosità (nullo nel caso dei fluidi).

Un'altra ed ultima discordanza fra il tensore di Minkowski (e di Dällenbach) e il nostro è nel termine in  $-[V_j/ic][V_k/ic]$  che corrisponde alla densità di energia nel riferimento in cui il punto considerato è fermo. Ma abbiamo mostrato che la teoria elettronica lascia arbitrarietà in questa parte, e impo-

nendo la [90] abbiamo usato di ciò per lasciare tale parte solo in  $\bar{T}_{jk}$  e nel tensore impulso-energia per inerzia, suddividendo così l'energia in quel riferimento in energia del campo elettromagnetico ed energia della materia. Dunque la parte che compare in più nel tensore di Minkowski rispetto al nostro noi la ritroviamo formata con l'energia interna  $U$ : così per il fluido reversibile a coefficienti indipendenti dai campi abbiamo nel tensore impulso-energia per inerzia il termine

$$C \frac{1}{c^2} \left[ \frac{1}{C} [\varepsilon(C, T) - \varepsilon_0] \frac{1}{2} \sum_j E_j^2 + \frac{1}{C} \left[ \frac{1}{\mu(C, T)} - \frac{1}{\mu_0} \right] \frac{1}{2} \sum_j B_j^2 \right] V_j V_k.$$

Condizioni come le [89] e [90] sono soddisfatte anche da  $\bar{T}_{jk}$  e  $\bar{T}_{jk}$  e sono quelle che per tutti questi tensori ci permettono di ricavare le densità di impulso e di energia (in moto con la materia) in un riferimento qualunque in funzione delle interazioni superficiali cui corrispondono e della velocità.

In definitiva però, per il tensore impulso-energia totale si arriva con le nostre considerazioni, come abbiamo visto, alla stessa espressione a cui si può arrivare utilizzando il tensore di Minkowski se ad esso si aggiungano le necessarie altre parti (ma è particolarmente difficile sistemare la parte che ne compensi l'asimmetria). Ed è logico perchè in ogni teoria subentrano o dal principio o da un certo punto in poi i ragionamenti energetici. Noi li abbiamo fatti sull'energia interna  $U$ , dopo aver stabilito un'espressione per l'impulso energia per fenomeni elettromagnetici che ci sembra in pieno accordo con la teoria elettronica, come appunto si richiede per tale parte, il che ha finora dato luogo a molte difficoltà.

## BIBLIOGRAFIA

- W. DÄLLENBACH: *Ann. d. Phys.*, **58**, 523 (1919).  
W. PAULI: *Encycl. d. math. Wiss.*, V Band, 2 Teil, N. 19, p. 667 (1920).  
G. H. LIVENS: *The theory of electricity* (Cambridge, 1926).  
M. ABRAHAM e R. BECKER: *Theorie der Electricität* (Leipzig, 1933).  
R. TOLMAN: *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Oxford, 1934).  
C. ECKART: *Phys. Rev.*, **58**, 919 (1940).  
A. SOMMERFELD e F. BOPP: *Ann. der Phys.*, VI, 8, 41 (1950).  
G. LAMPARIELLO: *Boll. U.M.I.*, III, **6**, 118 (1951).  
G. LAMPARIELLO: *Atti IV Congr. U.M.I. Taormina* (1951), I, p. 232.  
C. MÖLLER: *The theory of relativity* (Oxford, 1952), § 75.  
M. v. LAUE: *Die Relativitätstheorie*, I Band (Braunschweig, 1952).  
E. DURAND: *Électrostatique et magnétostatique* (Paris, 1953).

- G. A. KLUITENBERG: *Physica*, **19**, 689, 1079 (1953); **20**, 199 (1954).  
K. NOVOBÁTZKI: *Hung. Acta Phys.*, old series No. 5 (1949).  
G. GYÖRGYI e G. MARX: *Acta Phys. Hung.*, **3**, 213 (1954).  
G. GYÖRGYI: *Acta Phys. Hung.*, **4**, 121 (1954).  
K. NAGY: *Acta Phys. Hung.*, **4**, 327 (1955).  
G. MARX e K. NAGY: *Acta Phys. Hung.*, **4**, 295 (1955).  
G. MARX e G. GYÖRGYI: *Ann. der Phys.*, VI, **16**, p. 241 (1955).  
G. MARX: *Acta Phys. Hung.*, **1**, 209 (1952); **2**, 67 (1952); **3**, 75 (1953).  
G. MARX: *Suppl. Nuovo Cimento*, **1**, 265 (1955).  
PHAM MAU QUAN: *Ann. di Matematica*, IV, **38**, 121 (1955).  
PHAM MAU QUAN: *Journ. of Rat. Mechanics*, **5**, 473 (1956).  
L. SYNGE: *Relativity: the special theory* (Amsterdam, 1956).

## Le reazioni fotonucleari e la risonanza gigante.

### II. - Le distribuzioni energetiche e angolari dei fotoneutroni e dei fotoprotoni e la struttura fine della risonanza gigante.

V. DE SABBATA

*Istituto di Fisica dell'Università - Bologna*  
*Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Bologna*

(ricevuto il 13 Novembre 1958)

CONTENUTO. — 1. Introduzione. — 2. Sistematica. — 3. Conclusioni.

#### 1. - Introduzione.

In un precedente lavoro <sup>(1)</sup> si sono prese in esame le diverse teorie e i vari modelli nucleari, collettivi, a particelle indipendenti, a shell, che sono stati usati per cercare di dare una spiegazione ai risultati sperimentali che riguardano le fotoreazioni nucleari nella zona della risonanza gigante. Si era in quella sede brevemente accennato ai vari risultati sperimentali che vanno da misure di sezioni d'urto, a misure dell'energia  $E_m$  a cui si ha il massimo della sezione d'urto, del valore di questo massimo, della larghezza della risonanza, delle soglie del processo, e infine a misure di distribuzioni energetiche ed angolari. È di queste ultime in particolare che qui ci vogliamo occupare in maniera esauriente dandone un quadro sperimentale il più possibile completo. Le informazioni infatti che si possono trarre da uno studio accurato delle distribuzioni angolari ed energetiche sono molteplici e di grande importanza; esse forniscono indicazioni sul particolare tipo di interazione (dipolo o quadrupolo elettrico o magnetico), circa la validità di questo o quel modello nucleare, sui livelli energetici del nucleo residuo e infine su una eventuale struttura

(<sup>1</sup>) V. DE SABBATA: *Suppl. Nuovo Cimento*, 5, 243 (1957).



fine del processo di assorbimento ossia sulla possibilità di più di una risonanza nella zona della risonanza gigante che starebbe ad indicare la presenza di una interazione diretta del  $\gamma$  incidente con i singoli nucleoni del nucleo bersaglio. Non verranno comunque inclusi in questa rassegna i lavori riguardanti la fotodisintegrazione del deutone e quelli riguardanti le fotofissioni.

In maniera del tutto generale per quello che riguarda la distribuzione angolare si può dire che una distribuzione del tipo  $a + b \sin^2 \vartheta$  e cioè simmetrica attorno ai  $90^\circ$  è caratteristica dell'assorbimento di dipolo mentre una distribuzione asimmetrica del tipo  $a + b \sin^2 \vartheta (1 + p \cos \vartheta)^2$  (dove sperimentalmente  $p$  è positivo per cui è favorita la direzione in avanti) indica la presenza di un termine di interferenza dipolo-quadrupolo; quest'ultimo tipo di distribuzione è molto frequente per i fotoprotoni per diversi nuclei.

Per quello che riguarda la distribuzione energetica delle fotoparticelle la situazione è complicata; infatti per discutere il significato dei vari gruppi di protoni o neutroni che si possono individuare, è necessario riuscire a stabilire qual'è l'energia del fotone il cui assorbimento ha causato l'emissione di quella fotoparticella o di quel gruppo di fotoparticelle e ciò non è molto facile a causa dello spettro continuo dei  $\gamma$  di bremsstrahlung con cui è fatta la maggior parte delle esperienze.

L'ambiguità infatti sta nel fatto che i vari gruppi identificati possono provenire o da effettive diverse risonanze in assorbimento (quando il nucleo residuo viene lasciato in un ben definito livello) oppure dal fatto che le fotoparticelle lasciano il nucleo residuo in diversi stati eccitati.

Tuttavia quei particolari fotoprotoni o fotoneutroni che hanno energia più grande della differenza tra l'energia massima del fotone e l'energia di soglia per la transizione del nucleo residuo al primo stato eccitato, devono necessariamente provenire dalla transizione del nucleo residuo allo stato fondamentale. Perciò se da questa parte dello spettro energetico delle fotoparticelle (cioè dalla parte in cui l'energia è maggiore della differenza detta) si notano diversi gruppi di particelle, è chiaro che a ciascuno di questi gruppi deve corrispondere una risonanza nella sezione d'urto d'assorbimento dei fotoni e quindi una struttura fine della risonanza gigante.

Esperienze interessanti al riguardo sono quelle in cui si varia l'energia massima dei  $\gamma$  di bremsstrahlung osservando come si comportano i vari gruppi di fotoparticelle. Infatti l'osservazione e il confronto del comportamento di questi gruppi al variare dell'energia massima permette di stabilire se essi sono dovuti o meno ai vari livelli del nucleo residuo (v. ad es. [Li 56] e [J 57]): ad energie più alte vi sarà una maggiore influenza degli stati eccitati del nucleo residuo sulla distribuzione energetica.

La maniera di attribuire con certezza i diversi gruppi alla presenza di livelli del nucleo residuo è data mediante esperienze con raggi  $\gamma$  monocromatici, (come ad es. si ottengono dalle reazioni  ${}^7\text{Li}(p, \gamma)$  e  ${}^3\text{H}(p, \gamma)$ ).

In particolari casi il confronto delle esperienze con raggi  $\gamma$  monocromatici con quelle fatte con  $\gamma$  di bremsstrahlung potrebbe permettere di distinguere tra i gruppi di fotoparticelle dovuti alla presenza dei livelli del nucleo residuo e quelli dovuti invece alle risonanze in assorbimento e cioè a struttura fine della risonanza gigante. Inoltre sfruttando l'effetto Doppler si può variare l'energia dei  $\gamma$  emessi (in funzione dell'angolo) e ciò permette uno studio diretto di una eventuale struttura fine (v. per es. WOLFF e coll. [W 58] che usano i  $\gamma$  del trizio su  $^{12}\text{C}$ ).

Si è detto che per risalire dalla distribuzione energetica delle fotoparticelle, ottenute con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung, alla struttura fine, occorre sapere che i gruppi di protoni o neutroni sicuramente lasciano il nucleo residuo nello stesso stato ed in particolare in quello fondamentale (perchè è solo quest'ultimo, come si è mostrato, che può determinarsi con sicurezza quando l'energia delle fotoparticelle sia superiore al limite detto).

Ma vi è anche un altro interessante metodo per stabilire che ad esempio i fotoprotoni lasciano il nucleo residuo nello stato fondamentale: esso si basa sul principio del bilancio dettagliato. Infatti quando si trovi che gli eventuali massimi nella distribuzione energetica dei fotoprotoni della reazione  $X(\gamma, p)Y$  sono in accordo con le risonanze note della reazione inversa  $Y(p, \gamma)X$  (dove il nucleo  $X$  è lasciato nello stato fondamentale) nel senso che il rapporto  $\sigma(\gamma, p)/\sigma(p, \gamma)$  soddisfa il principio del bilancio dettagliato, va con estrema probabilità escluso il caso di una eventuale reazione del tipo  $X(\gamma, p\gamma')Y$ ; si può allora dire che  $Y$  è lasciato nello stato fondamentale e quindi i gruppi nella distribuzione energetica dei protoni dalla reazione  $X(\gamma, p)Y$  derivano da risonanze in assorbimento (v. ad es. WRIGHT e coll. [Wr 56] nello studio della  $^{14}\text{N}(\gamma, p)$ ).

Come si vedrà i risultati delle esperienze sia per quello che riguarda le distribuzioni angolari con le loro spesso pronunciate asimmetrie, sia per quello che riguarda le distribuzioni energetiche con le loro notevoli code spesso presenti verso le alte energie, mostrano che il fotoeffetto diretto vi giuoca una parte molto importante e con molta probabilità il modello a shell proposto da WILKINSON vi ha un ruolo predominante.

Come è noto il modello a shell fu inizialmente un modello a una particella, nel senso che il nucleo viene riguardato come un semplice potenziale attrattivo entro cui si muove una particella, su una certa orbita, in maniera del tutto analoga a come si muove un elettrone nel campo del nucleo. Con questo modello si poteva render conto abbastanza bene degli spin nucleari, momenti angolari orbitali e parità; non si riusciva però, col modello ad una particella, a descrivere accuratamente il momento magnetico. Occorre per questo tener conto anche delle altre particelle: si ha così quello che si chiama modello a particelle indipendenti (IPM); ora mentre nel modello a una particella il nucleone che si muove nel nucleo (il cosiddetto «core» che viene

riguardato come un semplice potenziale) e che a un certo momento lascia il nucleo lo fa non solo senza interagire con le altre particelle (questo è vero anche per l'IPM) ma anche in modo che il « core » dello stato iniziale coincida con il nucleo restante nello stato finale, nell'IPM (in cui si tiene conto che il « core » è formato di particelle) lo stato finale non coincide necessariamente col « core » dello stato iniziale. E questo, come si è già detto, non perchè vi sia stata interazione tra la particella uscente e le altre particelle del « core » ma semplicemente perchè il « core » può avere diverse configurazioni che corrispondono tutte al medesimo stato (compatibilmente col principio di Pauli). Si ha cioè che quando da un nucleo di numero di massa  $A$  viene emessa una particella resta un nucleo  $A - 1$ : questo nucleo  $A - 1$  si può trovare in un certo stato oppure in un altro; si chiamano « stati parenti » quegli stati del nucleo  $A - 1$  che sono responsabili dello stesso stato in  $A$ .

Questi stati parenti cioè possono esistere prima che il nucleone sia emesso. Così la probabilità che resti l'uno o l'altro degli stati parenti è direttamente proporzionale alla probabilità che esista l'uno o l'altro di questi parenti.

Ora con questo modello, WILKINSON riesce a render conto di vari risultati sperimentali tra cui va incluso anche il rapporto  $\sigma(\gamma, p)/\sigma(\gamma, n)$  che, come è noto, è quasi sempre più grande di quello permesso dalla teoria statistica.

Un altro studio sperimentale assai interessante riguarda il confronto tra i livelli che appaiono nella reazione  $(\gamma, n)$  e quelli nella  $(\gamma, t)$  in nuclei particolari per le informazioni che si possono avere circa l'indipendenza dalla carica delle forze nucleari. Quando un nucleo leggero del tipo  $N = Z + 1$  e  $A = 4n + 3$  viene bombardato con raggi  $\gamma$ , ci si aspettano livelli eccitati con spin isotopico  $T = \frac{3}{2}$  e  $T = \frac{1}{2}$  (a causa della  $\Delta T = 0, \pm 1$ ). I livelli  $T = \frac{1}{2}$  possono emettere neutroni o tritoni lasciando il nucleo residuo ai livelli con  $T = 0$  o con  $T = 1$ . Se viene emesso un neutrone, il nucleo residuo avrà  $N = Z =$  dispari e quindi potrà avere sia  $T = 0$  che  $T = 1$  tra i suoi livelli più bassi. Se viene emesso un tritone, il nucleo residuo avrà invece  $N = Z =$  pari e ci sarà solo  $T = 0$  tra i suoi livelli più bassi. Quindi negli stati  $T = \frac{1}{2}$  è possibile l'emissione sia di un neutrone che di un tritone.

Invece dagli stati di  $T = \frac{3}{2}$  sarà possibile solo l'emissione di neutroni perchè solo questa emissione conduce a un nucleo residuo con  $T = 1$  mentre l'emissione dei tritoni è proibita almeno fino a energie intorno ai 15 MeV sopra la soglia  $(\gamma, t)$  dove cominciano a essere possibili anche per i nuclei  $N = Z =$  pari, i livelli eccitati con  $T = 1$ . Così nella regione tra 0 e 15 MeV sopra la soglia  $(\gamma, t)$  è possibile distinguere gli stati  $T = \frac{1}{2}$  e  $T = \frac{3}{2}$  paragonando i livelli che appaiono nelle reazioni  $(\gamma, n)$  e  $(\gamma, t)$ : i livelli che appaiono in ambedue le reazioni hanno  $T = \frac{1}{2}$  mentre quelli che appaiono solo nella  $(\gamma, n)$  hanno  $T = \frac{3}{2}$ .

Così, come vedremo, per il  ${}^7\text{Li}$  nella regione tra 9 e 17 MeV si hanno cinque livelli  $(\gamma, n)$  e due  $(\gamma, t)$  e questo depone in favore della indipendenza dalla carica delle forze nucleari.

Altri nuclei convenienti per questo tipo di misura sono il  $^{11}\text{B}$  e il  $^{15}\text{N}$ .

Naturalmente la verifica della indipendenza dalla carica delle forze nucleari può farsi anche dal confronto delle sezioni d'urto  $(\gamma, n)$  e  $(\gamma, p)$  per quei particolari nuclei che hanno  $J = T_z = 0$  come indicato da GELL-MANN e TELEGDI [G 53] (ovviamente a parte un eventuale effetto di interferenza dipolo-quadrupolo).

## 2. - Sistematica.

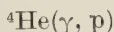
*Nota.* - Qualora nel simbolo che rappresenta l'elemento chimico non sia indicato il numero di massa  $A$ , va inteso che viene considerata la composizione isotopica naturale.



CRANBERG [Cr 58] studia la fotodisintegrazione dell' $^3\text{He}$  usando un beta-trone di  $E_{\text{max}} = 22$  MeV ed emulsioni nucleari come rivelatori.

La distribuzione energetica dei fotoprodotti può all'incirca risolversi in due larghi gruppi: uno a più bassa energia che corrisponde ai protoni provenienti dalla rottura dell' $^3\text{He}$  in tre corpi e uno a più alta energia corrispondente ai protoni che provengono dalla rottura in due corpi.

La distribuzione angolare di questi ultimi prodotti è data da  $0.37 + \sin^2 \theta \cdot (1 + 0.8 \cos \theta)$ .



FULLER [Fu 54] irradia un gas di elio a pressione atmosferica con  $\gamma$  di bremsstrahlung da 26, 29, 32, e 40 MeV. La distribuzione angolare dei protoni rivelati in emulsioni nucleari si può scrivere nella forma (nel c.m.)  $a/b + \sin^2 \theta \cdot (1 + (c/b) \cos \theta)$ ; si ha che il termine di interferenza cresce lentamente al crescere dell'energia ma è approssimativamente costante, con  $c/b = 0.2 \pm 0.1$ . Il termine isotropo cresce invece rapidamente con l'energia da 0 fino a  $0.33 \pm 0.2$  per energia media dei fotoni di 32.5 MeV. La sezione d'urto  $(\gamma, p)$  raggiunge un massimo di 1.8 mb a circa 26 MeV.

Invece nell'esperienza di REID e coll. [R 56], la distribuzione angolare dei fotoprotoni dalla reazione  $^4\text{He}(\gamma, p)^3\text{H}$  studiata in camera di Wilson, appare (sempre nel c.m.) simmetrica attorno a  $90^\circ$  ma è più acuta di quella che ci si attende da una distribuzione  $\sin^2 \theta$ . La funzione d'eccitazione ha un mas-



simo nella regione di 26 MeV e decresce più rapidamente al crescere della energia di quello che non indichino i risultati di Fuller.

Esperienze fatte a più alta energia (come ad es. quelle di GORBUNOV e coll. [G 57] che usano  $\gamma$  da 170 MeV o quelli di BENEDICT e coll. [Be 51] con  $\gamma$  di bremsstrahlung da 300 MeV) non verranno descritte qui perchè al di fuori di quello che si propone la presente rassegna.

### ${}^6\text{Li}(\gamma, p)$

KLIGER e coll. [K 56] misurano la distribuzione angolare ed energetica dei fotoprotoni usando raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung a varie energie massime cioè con  $E_{\text{max}}$  di 30, 42, 60, e 80 MeV. L'esame viene fatto con la tecnica delle emulsioni nucleari. Le lastre sono collocate in una camera a vuoto a vari angoli rispetto alla direzione dei  $\gamma$  e precisamente a  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  e  $150^\circ$ . Per ogni angolo sono state scelte 2000 tracce. La distribuzione angolare può porsi approssimativamente nella forma  $a + b \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)^2$  e si può spiegare mediante interazione diretta dei  $\gamma$  con i nucleoni individuali. La distribuzione energetica indica che le transizioni in stati parenti del nucleo residuo sembrano avere un ruolo importante nel fotoeffetto diretto.

### ${}^6\text{Li}(\gamma, n)$ e $(\gamma, p)$

PROCTOR e VOELKER [Pr 58] misurano nella fotodisintegrazione del litio le coincidenze neutrone-protone e lo spettro fotoprotonico; il fatto che le coincidenze n-p non mostrano alcuna correlazione angolare tra neutrone e protone, indica che probabilmente è da scartare un modello del nucleo  ${}^6\text{Li}$  come particella  $\alpha + \text{deutone}$ . Misure sullo spettro energetico dei fotoprotoni mostrano che per i  $\gamma$  di bremsstrahlung da 17.5 MeV i protoni hanno energia di 9.2 MeV e questo porta alla conclusione che la reazione  ${}^6\text{Li}(\gamma, p){}^5\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + n$  rende conto per il 30% dell'intensità dei neutroni misurata da Romanowski (come riportato alla *Photonuclear Conference* del Novembre 1956); mentre misure sull'intensità dei fotoneutroni al di sopra di 1.3 MeV in coincidenza con protoni di bassa energia, mostrano che circa il 60% dei neutroni va attribuito alla reazione  ${}^6\text{Li}(\gamma, n){}^5\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + p$ .

### ${}^7\text{Li}(\gamma, n)$

GOLDEMBERG e KATZ [Gl 54] osservano la struttura fine nella  $\sigma(\gamma, n)$  rivelando direttamente i neutroni. Trovano discontinuità nella curva che dà l'intensità dei neutroni in funzione dell'energia a 9.6, 10.8, 12.4, 14.0, 17.5 MeV, e concludono che queste discontinuità implicano struttura fine in assorbimento.



${}^7\text{Li}(\gamma, p)$ 

TITTERTON e coll. [Ti 53] nello studio della  $\sigma(\gamma, p)$  a differenza che per la  $\sigma(\gamma, n)$ , non trovano nessuna struttura fine (Fig. 1 b). Lo studio viene fatto esaminando fino a 24 MeV la funzione d'eccitazione.

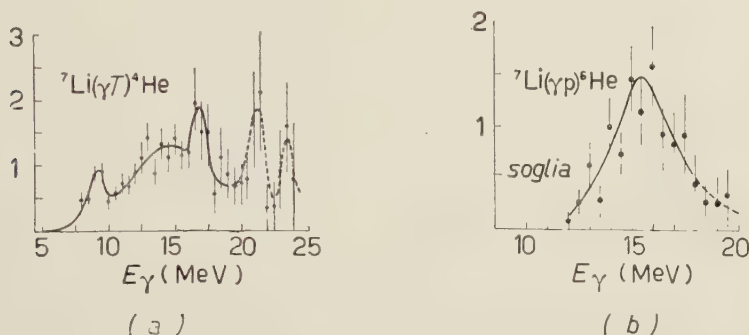


Fig. 1. — Dipendenza delle sezioni d'urto  $(\gamma, T)$  e  $(\gamma, p)$  dall'energia [Ti 53].

 ${}^7\text{Li}(\gamma, t)$ 

Sempre TITTERTON e coll. [Ti 53] trovano invece per la  $\sigma(\gamma, t)$  quattro massimi caratteristici di risonanze in assorbimento che corrispondono ad altrettanti livelli nel  ${}^7\text{Li}$  il primo dei quali a 9.3 MeV è ben marcato mentre gli altri, meno risolti, sono a 16.7, 21.5 e 23.5 MeV (Fig. 1 a). Secondo PEASLEE [Pe 52] il più gran numero dei livelli nella reazione  $(\gamma, n)$  rispetto alla  $(\gamma, t)$  dimostra, alla luce del formalismo di spin isotopico, che è favorita l'indipendenza dalla carica delle forze nucleari anzichè la simmetria di carica.

Infatti il confronto delle sezioni d'urto  $(\gamma, n)$  e  $(\gamma, t)$  per i nuclei leggeri con  $A = 4n + 3$  e  $N = Z + 1$  permette di avere informazioni e di decidere tra la simmetria di carica e l'indipendenza dalla carica. Se lo spin isotopico è un buon numero quantico (indipendenza dalla carica) appaiono più livelli individuali nella  $(\gamma, n)$  che non nella  $(\gamma, t)$ . I livelli peculiari alla  $(\gamma, n)$  hanno  $T = \frac{3}{2}$  e gli altri  $T = \frac{1}{2}$ . L'unico caso finora misurato, questo del  ${}^7\text{Li}$ , favorisce l'indipendenza dalla carica.

Una distinzione tra  $T = \frac{1}{2}$  e  $T = \frac{3}{2}$  implica indipendenza dalla carica. Nuclei stabili con  $N = Z + 1$  hanno  $T = \frac{1}{2}$  nello stato fondamentale mentre il più basso stato eccitato con  $T = \frac{3}{2}$  è a circa 10 MeV. È necessario raggiungere queste energie con sufficiente precisione per separare livelli di risonanze individuali.

${}^9\text{Be}(\gamma, n)$ 

NATHANS ed HALPERN [N 53] studiano la sezione d'urto della reazione  ${}^9\text{Be}(\gamma, n)$  dalla soglia fino a 24 MeV. Il risultato mostra due massimi: uno (attorno ai 10 MeV) è dovuto alla eccitazione del neutrone ottico e il secondo

(~ 22 MeV) alla eccitazione del « core »  ${}^8\text{Be}$ ; questo secondo massimo è probabilmente dovuto a risonanza di dipolo per il « core »  ${}^8\text{Be}$  dato che si trova ad un'energia (~ 22 MeV) coincidente con quella del massimo per  ${}^9\text{Be}(\gamma, p)$  (che nell'esperienza di HASLAM e coll. [Ha 53] è a 22.2 MeV) e anche con quella della risonanza gigante per la reazione  $\text{C}(\gamma, n)$ .

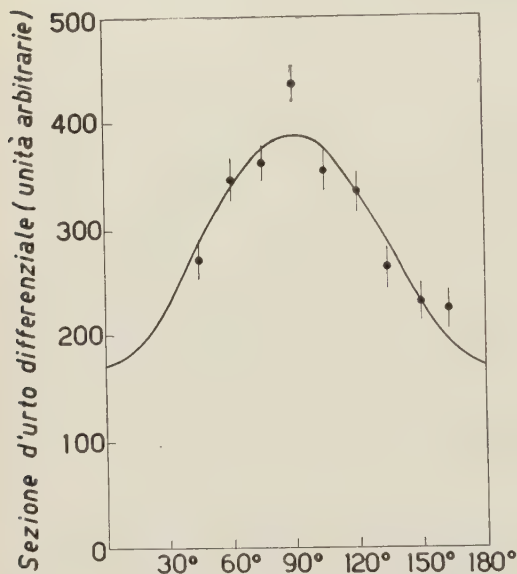


Fig. 2. - Distribuzione angolare dei neutroni dal berillio bombardato con bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 18$  MeV [Fa 56].

La distribuzione angolare dei fotoneutroni è invece studiata da FABRICAND e coll. [Fa 56] che usano raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\text{max}} = 18$  MeV. Trovano una distribuzione angolare come data in Fig. 2 della forma  $(1.26 \pm 0.11) + \sin^2 \theta$  (questa forma della distribuzione angolare dei fotoneutroni è stata trovata da [H 49] anche a energie dei  $\gamma$  molto

più basse bombardando il berillio con raggi  $\gamma$  da 1.70, 1.81 e 2.76 MeV. Per i primi due valori dell'energia dei  $\gamma$  questa distribuzione è isotropa mentre per i  $\gamma$  da 2.76 è della forma  $a + b \sin^2 \theta$  con  $a/b = 1.2$ ).

A più alta energia Dixon [D 55] con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 70$  MeV esamina la distribuzione angolare dei fotoneutroni trovandola in accordo con una distribuzione del tipo  $a + b \sin^2 \theta$  con  $b/a \sim 1$ . Il fatto che questo valore di  $b/a$  sia molto più alto di quello trovato ad es. da PRICE e KERST [P 50] che è invece di ~ 0.3 dipende probabilmente dal tipo di rivelatore usato: il confronto indicherebbe che i neutroni anisotropi sono in media più veloci di quelli isotropi.

 ${}^9\text{Be}(\gamma, p)$ 

KLIGER e coll. [K 56] osservano in emulsioni nucleari i fotoprotoni usando raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\text{max}}$  rispettivamente di 30, 42, 60 e 80 MeV.

Studiano la distribuzione angolare ed energetica: per questo pongono le lastre in camera a vuoto sotto diversi angoli rispetto alla direzione dei  $\gamma$  incidenti e cioè a  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  e  $150^\circ$  scegliendo per ogni angolo circa 2000 tracce. Trovano per la distribuzione angolare un andamento secondo  $a + b \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)^2$  con una percentuale di quadrupolo elettrico  $E2$  che, all'aumentare dell'energia, cresce dal 15% al 20% mentre la distribuzione energetica indica una forte percentuale di fotoeffetto diretto.

In un'altra esperienza STEPHENS [S 56] e COHEN e coll. [Co 56] esaminano in emulsioni nucleari i fotoprotoni prodotti con raggi  $\gamma$  da bremsstrahlung di  $E_{\max} = 25$  MeV. La distribuzione energetica come data in Fig. 3 mostra

pochi protoni di energia  $> 4$  MeV e ciò implica che le transizioni allo stato fondamentale e al primo stato eccitato del  ${}^8\text{Li}$  sono relativamente rare. Invece la presenza

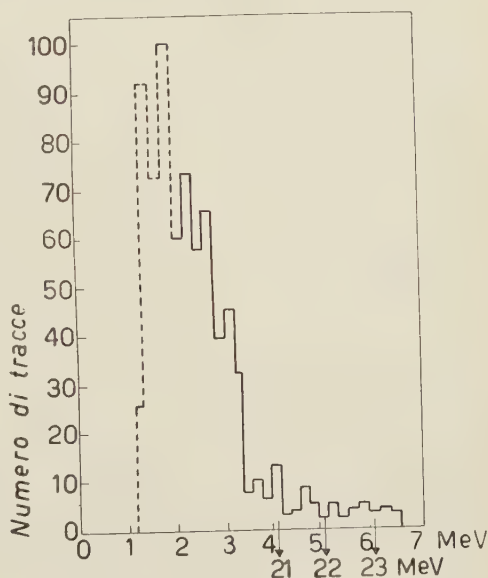
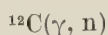


Fig. 3. - Distribuzione energetica dei fotoprotoni dal berillio: la scala superiore è la energia di disintegrazione mentre la scala inferiore è l'energia dei fotoni se il nucleo residuo è lasciato nello stato fondamentale [Co 56].



DIXON [D 55] studia la distribuzione angolare ed energetica dei fotoneutroni con bremsstrahlung di 70 MeV. Egli fa questo per altri 6 elementi (Pb, Cu, Sn, Al, Fe e Be); il rivelatore è a scintillazione (lucite e solfuro di zinco). Scritta la distribuzione angolare nella forma  $a + b \sin^2 \theta$  si trova per il rapporto  $b/a$  il valore  $1.6 \pm 0.4$  il che dimostra una forte anisotropia. Questa forte anisotropia non è d'accordo con i risultati precedenti di TERWILLIGER e JONES [T 51] (questi usano bremsstrahlung con  $E_{\max} = 330$  MeV e trovano che l'intensità dei neutroni a  $38^\circ$  e  $142^\circ$  è il 10% in meno di quella che è a  $90^\circ$ ). Tale anisotropia va attribuita a un processo diretto piuttosto forte.

Anche FABRICAND ed altri [Fa 56] misurano la distribuzione angolare dei fotoneutroni con bremsstrahlung di  $E_{\max} = 23$  MeV e trovano un andamento  $1 + (1.35 \pm 0.88) \sin^2 \theta$  (Fig. 4). Questa esperienza è stata rifatta accurata-

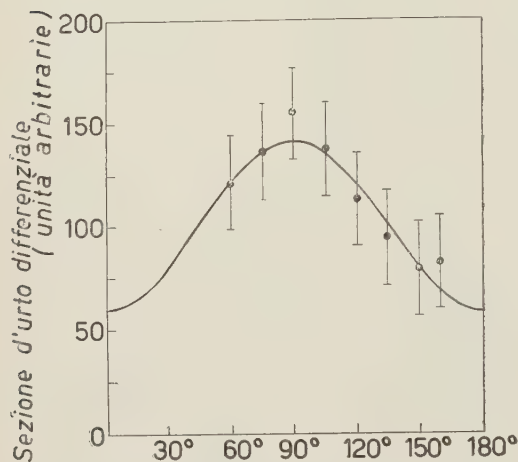


Fig. 4. - Distribuzione angolare dei neutroni dal carbonio bombardato con bremsstrahlung di  $E_{\max} = 23$  MeV [Fa 56].

mente (una precedente esperienza [F 55], portava per i neutroni una distribuzione angolare con un minimo a  $90^\circ$ ) per provare l'ipotesi della indipendenza dalla carica delle forze nucleari. Infatti in un lavoro teorico GELL-MANN e TELEGI [G 53] mostrano che nella ipotesi della indipendenza dalla carica delle forze nucleari le sezioni d'urto  $(\gamma, p)$  e  $(\gamma, n)$  nei nuclei con  $J = 0$  e  $T_z = 0$ , per ogni stato del nucleo residuo, devono essere identiche in funzione dell'energia e dell'angolo (questo vale se non vi è interferenza tra dipolo elettrico ed altri multipoli). Ora l'esperienza sulla distribuzione angolare dei neu-

troni, mostra che vi è una componente neutronica di momento angolare diverso da 0 e ciò indica che la reazione anzichè procedere attraverso la formazione di un nucleo composto, passa attraverso stati a particelle indipendenti. MANN e coll. [M 55] hanno fatto un calcolo esplicito nel caso del  $^{12}\text{C}$  ottenendo per i fotoprotoni una distribuzione angolare  $1 + \sin^2 \theta$  nell'ipotesi di accoppiamento  $jj$ , e una distribuzione  $1 + 1.5 \sin^2 \theta$  nell'ipotesi di accoppiamento  $LS$ . La presente esperienza non riesce a distinguere tra questi due casi perchè ambedue le distribuzioni cadono entro i limiti degli errori sperimentali. Quanto alla verifica della indipendenza dalla carica occorre osservare che nel caso della  $\sigma(\gamma, p)$  vi è interferenza tra assorbimento di dipolo e di quadrupolo (come si nota dal picco in avanti nella distribuzione angolare dei fotoprotoni) (v. per es. fig. 9) e perciò per confrontare le due distribuzioni angolari dei fotoneutroni e dei fotoprotoni occorre trascurare l'interferenza; se dunque questa viene trascurata, la distribuzione angolare dei fotoprotoni è di  $1 + (1.35 \pm 1.12) \sin^2 \theta$  in buon accordo con la distribuzione angolare dei fotoneutroni del presente esperimento.

Quel che si può dire è che i due esperimenti si accordano con l'ipotesi della indipendenza dalla carica delle forze nucleari. Quanto alla distribuzione energetica è possibile, da questa, risalire fino a un certo punto a una probabile struttura fine nella sezione d'urto d'assorbimento. Ora che sia possibile fino



a un certo punto, dipende dal fatto che, in generale, la distribuzione energetica mostra la presenza di diversi gruppi di neutroni e solo in casi particolari si riesce a stabilire che questi diversi gruppi appartengono tutti a transizioni che conducono allo stesso stato del nucleo finale (che in questo caso è l' $^{11}\text{C}$ ) e perciò devono essere attribuiti a diversi livelli risonanti del  $^{12}\text{C}$ . Talvolta però è difficile basandosi sullo studio di questi diversi gruppi energetici di neutroni (o protoni) distinguere tra struttura fine dovuta a diverse risonanze in assorbimento e struttura fine dovuta invece a transizioni a diversi stati del nucleo finale. Infatti, com'è chiaro, nella distribuzione energetica dei fotoneutroni (o dei fotoprotoni) i due effetti sono sovrapposti. Esperienze con raggi  $\gamma$  monocromatici permetterebbero di attribuire la struttura fine, se presente, solo alle transizioni a diversi stati del nucleo finale e perciò permetterebbero di selezionare i due effetti.

J. GOLDBERG e L. KATZ [Gl 54] osservano questa struttura fine rivelando direttamente i neutroni e trovano buon accordo con una esperienza precedente, quella di [K 54], in cui viene invece studiata la curva di attivazione (e si basa quindi sull'attività residua  $\beta^+$  dell' $^{11}\text{C}$ ). Queste curve di attivazione mostrano delle discontinuità che i suddetti autori interpretano come dovute a forti assorbimenti di fotoni nel  $^{12}\text{C}$  rispettivamente a 19.3, 19.8, 20.1, 20.5, 20.7, 21.1, 21.6, 22.4 e 22.8 MeV. Queste discontinuità sono salite a ben 19 in una recentissima esperienza di KATZ [K 58] tutte comprese tra 18.721 e 22.88 MeV indicando altrettanti livelli in  $^{12}\text{C}$  (precisamente essi sono: 18.721, 18.90, 18.96, 19.08, 19.17, 19.30, 19.46, 19.57, 19.76, 19.92, 20.13, 20.29, 20.62, 20.90, 21.08, 21.22, 21.58, 22.02, 22.88).

Invece BASILE e GUSAKOW [Ba 58] trovano solamente 5 discontinuità (sempre nello stesso intervallo energetico: dalla soglia per il processo  $(\gamma, n)$  a 18.7 MeV fino a 23 MeV).

D'altra parte misure di assorbimento dei  $\gamma$  fatte da WOLFF e coll. [W 58] con raggi  $\gamma$  monocromatici da 20.3 a 20.8 MeV provenienti dalla reazione  $^3\text{T}(p, \gamma)^4\text{He}$  non danno nessuna evidenza di livelli discreti o struttura fine benchè, secondo gli autori, i risultati non siano incompatibili con la struttura piuttosto diffusa data da COHEN [Co 56]. La risoluzione ottenuta da WOLFF e coll. in questa esperienza è di  $(70 \div 100)$  keV.

$$^{12}\text{C}(\gamma, p)$$

La presenza di una struttura fine nella risonanza gigante del  $^{12}\text{C}$  come si è vista nello studio della reazione  $(\gamma, n)$ , risulta anche da esperienze sulla reazione  $(\gamma, p)$ .

Considerazioni di carattere generale vengono fatte, come si è già accennato, da MANN, STEPHENS e WILKINSON [M 55]. Questi notano che lo stato di riso-



nanza gigante per il processo  $^{12}\text{C}(\gamma, p)$  attorno a 22 MeV ha il carattere di « particelle indipendenti » ed è collegato in maniera semplice col modello a shell nella descrizione dello stato fondamentale del  $^{12}\text{C}$  e dei primi stati eccitati dell' $^{11}\text{B}$ . Naturalmente parlando di risonanza gigante attorno a 22 MeV non si intende che venga eccitato solo uno stato; tuttavia è conveniente discutere uno stato risonante corrispondente alla grossa risonanza attorno ai 22 MeV: in pratica tale grosso stato apparirà suddiviso tra i diversi stati di struttura fine. Poichè lo stato fondamentale del  $^{12}\text{C}$  è  $0^+$ , lo stato di risonanza gigante formato per assorbimento di dipolo elettrico è  $1^-$ . Se questo stato fosse uno stato del nucleo composto nel senso che il suo modo di decadimento è determinato solo da fattori statistici, energia, momento angolare totale, parità e spin isotopico, decadrebbe nello stato fondamentale dell' $^{11}\text{B}$  che è  $\frac{3}{2}^-$  e al primo stato eccitato a 2.14 MeV che presumibilmente è  $\frac{1}{2}^-$ , principalmente per onda  $s$  perchè la barriera per protoni  $d$  è molto forte: la penetrabilità dei protoni  $s$  è 5 volte quella dei protoni  $d$  (i protoni d'onda  $p$  sono esclusi a causa della conservazione della parità). Perciò la distribuzione angolare dei fotoprotoni dovrebbe essere quasi isotropa; invece sperimentalmente HALPERN e MANN [H 51] trovano una distribuzione della forma  $1 + 1.5 \sin^2 \theta$  il che indica una notevole emissione di protoni con momento angolare  $\neq 0$ .

Ora come è ben noto l'ipotesi di particelle indipendenti, porta proprio ad una distribuzione angolare del tipo  $a + b \sin^2 \theta$ . In particolare per protoni  $d$  quei modelli che coinvolgono solo transizioni  $l \rightarrow l+1$ , impongono che lo stato iniziale del protone sia uno stato  $p$  e questo porta in accoppiamento  $jj$  alla distribuzione  $1 + \sin^2 \theta$  mentre in accoppiamento  $LS$  dà  $1 + 1.5 \sin^2 \theta$ . Come si vede l'accoppiamento  $LS$  è meglio in accordo con i risultati sperimentali. Sembra secondo CHRISTY [C 53] che l'accoppiamento di Russel-Sanders, cioè  $LS$ , sia per i nuclei leggeri una approssimazione migliore che non l'accoppiamento  $jj$ ; infatti l'accordo con l'accoppiamento  $jj$  è meno buono che con  $LS$  e d'altra parte il modello  $jj$  richiede restrizioni più dure di quelle relative all'accoppiamento  $LS$ . L'accoppiamento  $LS$  è anche meglio in accordo con la distribuzione energetica che mostra che lo stato fondamentale è favorito per un fattore quattro o più (v. STEPHENS e MANN [S 54]). Infatti mentre l'accoppiamento  $jj$  darebbe transizioni solo per lo stato fondamentale dell' $^{11}\text{B}$  essendo questo l'unico parente del  $^{12}\text{C}$ , l'accoppiamento  $LS$  ha come parenti i due stati più bassi dell' $^{11}\text{B}$  dove però la transizione allo stato fondamentale, tenuto conto della larghezza ridotta, della penetrabilità ecc. è favorita per un fattore circa 5.

Passando alle esperienze, vi è quella di HALPERN e coll. [H 52] che studiano la distribuzione angolare dei fotoprotoni usando raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\text{max}} = 23$  MeV contro un bersaglio di  $38 \text{ mg/cm}^2$ ; questa esperienza mostra un massimo verso gli  $80^\circ$ . Precisamente si ha un andamento di  $1 + a (\sin \theta + 0.25 \sin \theta \cos \theta)^2$ ; si nota cioè una interferenza dipolo-quadrupolo. L'assorbimento di quadrupolo è circa l'1% (ossia minore per un fattore 4

di quello che ad esempio si ha nel Cu e nel Co). Quanto a una eventuale struttura fine in assorbimento la situazione che si ha nello studio della distribuzione energetica dei fotoprotoni non è molto chiara. Vi è una prima esperienza di STEPHENS e MANN [S 54] e [Se 55] in cui vengono osservate 408 tracce di fotoprotoni da carbonio usando  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\text{max}} = 23$  MeV ed emulsioni nucleari come rivelatore; si ha un andamento per la distribuzione energetica che presenta un massimo a 5.5 MeV e una larghezza a metà massimo di 2.8 MeV.

Ma l'esperienza più dettagliata al riguardo è quella di COHEN e coll. [Co 56] e STEPHENS [S 56] i quali usano un betatrone da 25 MeV; vengono rivelati i fotoprotoni con le emulsioni nucleari e si ottiene una buona risoluzione per la distribuzione energetica che mette in evidenza vari gruppi di fotoprotoni (Fig. 5); per questi viene valutata la funzione d'eccitazione per transizioni del nucleo residuo allo stato fondamentale, deducendo quindi una struttura fine anche per la funzione d'eccitazione fotonica nella regione della risonanza gigante; inoltre la struttura trovata è in accordo con quella osservata per la  $(\gamma, n)$ .

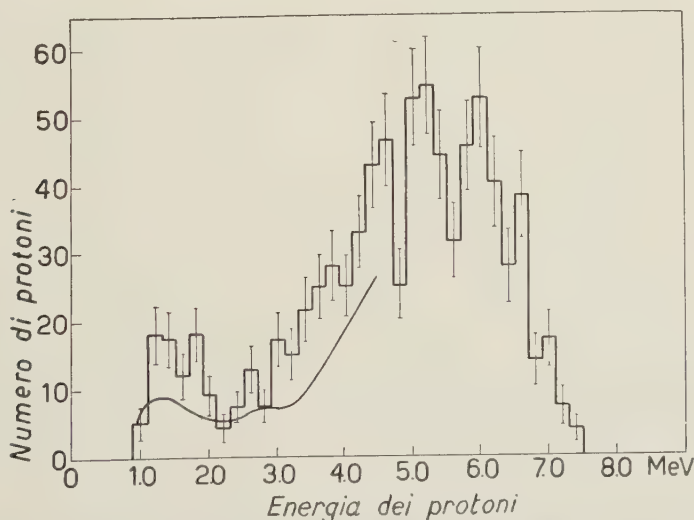


Fig. 5. - Distribuzione energetica dei fotoprotoni da polietilene. La curva dà la distribuzione dei protoni predetta dalla reazione inversa  $^{11}\text{B}(p, \gamma)$  applicando il bilancio dettagliato [Co 56].

Occorre tuttavia notare che si riscontrano notevoli difficoltà nella interpretazione dei vari gruppi di protoni di Fig. 5 i quali non necessariamente corrispondono a diverse risonanze in assorbimento. Infatti in questa esperienza i protoni con energia  $< 5.4$  MeV possono essere prodotti non solo in transizioni allo stato fondamentale dell' $^{11}\text{B}$  ma anche al primo stato eccitato dell' $^{11}\text{B}$  (che

si trova a 2.14 MeV); così i protoni con energia  $< 2.7$  MeV possono essere prodotti anche in transizioni ai livelli di 4.46 e 5.03 MeV dell' $^{11}\text{B}$ .

Tuttavia si possono avere ulteriori informazioni considerando la reazione inversa  $^{11}\text{B}(p, \gamma)^{12}\text{C}$  con  $^{12}\text{C}$  lasciato nello stato fondamentale e applicando il bilancio dettagliato. Si può inoltre notare che la struttura fine che appare nella  $^{12}\text{C}(\gamma, p)^{11}\text{B}$  deve essere simile a quella della  $^{12}\text{C}(\gamma, n)^{11}\text{C}$  poichè  $^{11}\text{B}$  e  $^{11}\text{C}$  sono nuclei speculari.

Infatti la risonanza gigante è principalmente assorbimento di dipolo elettrico della radiazione incidente da parte del nucleo; poichè lo stato fondamentale del  $^{12}\text{C}$  è  $0^+$  tale assorbimento può condurre solo agli stati eccitati  $1^-$

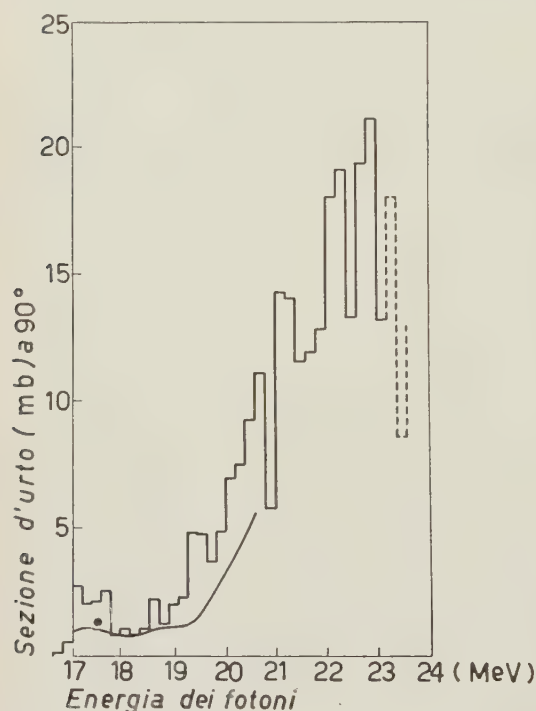


Fig. 6. - Sezione d'urto per la reazione  $^{12}\text{C}(\gamma, p)$  ottenuta da Fig. 5 nell'ipotesi che  $^{11}\text{B}$  sia sempre lasciato nello stato fondamentale. La curva invece è la sezione d'urto ottenuta con il bilancio dettagliato dalla  $^{11}\text{B}(p, \gamma)$  (il punto a 17.6 MeV è di MANN e TITERTON [M 56]) [Co 56].

Quanto al principio del bilancio dettagliato questo viene sfruttato anche da MANN e TITERTON [M 56] i quali calcolano la sezione d'urto assoluta a una energia di 17.63 MeV per la fotoreazione  $^{12}\text{C}(\gamma, p)^{11}\text{B}$ . Tale misura è fatta considerando il rapporto del numero di protoni al numero delle stelle in

in  $^{12}\text{C}$  che possono decadere per emissione di un protone a  $^{11}\text{B}$  o di un neutrone a  $^{11}\text{C}$ . Gli ultimi due sono nuclei speculari con stati fondamentali simili i cui spin e parità li rendono accessibili alle transizioni dallo stato  $1^-$  in  $^{12}\text{C}$ . Ci si deve quindi aspettare che la  $(\gamma, p)$  e la  $(\gamma, n)$  siano approssimativamente simili. Tuttavia le incertezze sperimentali di entrambi i lavori (sia  $(\gamma, p)$  che  $(\gamma, n)$ ) sono notevoli e impediscono un preciso confronto; ciò nonostante la distribuzione energetica dei fotoprotoni dà una conferma indipendente della struttura fine nella risonanza gigante in  $^{12}\text{C}$  (Fig. 6).

In conclusione si ha che la struttura fine nella distribuzione energetica dei protoni (Fig. 5) si riflette nella curva della sezione d'urto. Risonanze si hanno con certezza a 21.5 e 22.6 MeV e forse anche a 20.8 e 23.1 MeV (Fig. 6).

carbonio utilizzando la ben nota sezione d'urto  $^{12}\text{C}(\gamma, 3\alpha)$ . Il valore di questa ultima è preso dal lavoro di CARVER e coll. [C 55] i quali esaminano la  $^{12}\text{C}(\gamma, 3\alpha)$  trovando risonanze vicino a 12.3 MeV e forse a 15 e 16 MeV e danno i valori a tre distinte energie: 17.6, 14.8 e 12.3 MeV trovando rispettivamente i valori di  $(1.70 \pm 0.24)$ ,  $(0.33 \pm 0.07)$  e  $(1.15 \pm 0.6) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$ . Mann e Titterton trovano per il rapporto  $N(\gamma, p)/N(\gamma, 3\alpha)$  del numero dei protoni a quello delle  $\alpha$  il valore di  $7.00 \pm 0.33$ . Perciò la  $\sigma(\gamma, p)$  calcolata in questa maniera è  $\sigma(\gamma, p) = \sigma(\gamma, 3\alpha)N(\gamma, p)/N(\gamma, 3\alpha) = (1.19 \pm 0.21) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$ . Questo valore è inoltre in accordo con quello che si ottiene dal valore della sezione d'urto del processo  $^{11}\text{B}(p, \gamma)^{12}\text{C}$  applicando il principio del bilancio dettagliato.

Per questo vengono usati i dati di HUNS e DAY [H 53] i quali danno la funzione d'eccitazione per il processo  $^{11}\text{B}(p, \gamma)^{12}\text{C}$  (dove  $^{12}\text{C}$  è lasciato nel suo stato fondamentale) fino a energie del protone di 2.8 MeV; [H 53] trovano una risonanza a 17.2 MeV con una larghezza a metà massimo di 1.27 MeV; altri risultati sulla  $^{11}\text{B}(p, \gamma)^{12}\text{C}$  sono dati da GOVE e PAUL [G 55] i quali danno anche la distribuzione angolare dei  $\gamma$  per energie del protone da 1.0 a 2.5 MeV, distribuzione che risulta anisotropa. Da tali risultati si trova con il bilancio dettagliato una sezione d'urto  $^{12}\text{C}(\gamma, p)^{11}\text{B}$  di  $(1.09 \pm 0.16) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$  dove l'errore è quello della sezione d'urto assoluta  $^{11}\text{B}(p, \gamma)^{12}\text{C}$ .

Quanto alla distribuzione energetica dei fotoprotoni si nota un gruppo di protoni molto ben risolto a 1.5 MeV.

Altre esperienze sono quelle di KLIGER e coll. [K 56] i quali danno le distribuzioni angolari ed energetiche dei fotoprotoni esponendo lastre nucleari in camere a vuoto a vari angoli rispetto ai raggi  $\gamma$  incidenti e cioè a  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  e  $150^\circ$ . Le energie massime dei  $\gamma$  di bremsstrahlung usate sono rispettivamente di 30, 42, 60 e 80 MeV. Le tracce esaminate sono circa 2000. Trovano una distribuzione angolare della forma  $a + b \sin^2 \theta \cdot (1 + p \cos \theta)^2$  con una percentuale  $E2$  che va dal 5% all'11% con l'aumentare dell'energia mentre la distribuzione energetica mostra che il fotoeffetto diretto ha un notevole peso avendosi indicazioni di transizioni in stati parenti del nucleo residuo.

Misure della distribuzione angolare dei fotoprotoni e dei fotoneutroni da carbonio sono state fatte anche a più alta energia. Per es. JOHANSSON [J 55] opera con  $E_{\text{max}} \sim 65 \text{ MeV}$  e misura protoni sopra 14 MeV. Anche per questi la distribuzione angolare è della forma  $a + (\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$  con un massimo verso i  $60^\circ$ . I valori di  $a$  e  $p$  sono rispettivamente 0.32 e 0.80. Invece per i neutroni con energia sopra 5 e 10 MeV, la distribuzione angolare va come  $a + b \sin^2 \theta$ .

Altre importanti informazioni sono ottenute dalle misure di assorbimento dei fotoni. Così KOCH e FOOTE [K 53] fanno direttamente misure di assorbimento dei raggi X provenienti da un betatrone operante a 30 MeV. Il rivelatore è uno spettrometro NaI ad assorbimento totale. Lo spettro mostra una



marcata depressione dell'intensità dovuta ad assorbimento nucleare. L'assorbimento presenta un massimo a  $\sim 20$  MeV.

TZARA [T 56] trova una risonanza particolarmente intensa nell'assorbimento di fotoni a 22.8 MeV. Si noti che a questa energia la curva d'attivazione relativa alla reazione  $(\gamma, n)$  presenta una discontinuità attribuita da KATZ e coll. [K 54] a un livello di larghezza  $< 40$  keV; invece il limite superiore trovato per la sezione efficace di assorbimento conduce ad attribuire a questo livello una larghezza  $\Gamma_n > 400$  keV, in contraddizione con le conclusioni dedotte dalla interpretazione della curva d'attivazione. Secondo TZARA occorre ammettere che le sezioni efficaci della reazione  $(\gamma, n)$  e quelle d'assorbimento, pre-

sentino risonanze larghe; infatti TZARA mostra che gli andamenti delle curve d'attivazione possono essere spiegati anche con risonanze larghe.

Più recentemente LIVESEY [L 57] osserva i fotoprotoni con bremsstrahlung di  $E_{\max} = 35$  MeV esponendo il gas propano ai raggi  $\gamma$  e rivelando le particelle cariche prodotte in emulsioni nucleari. La distribuzione energetica mostra un massimo a 6.0 MeV che è collegato con la posizione della ri-

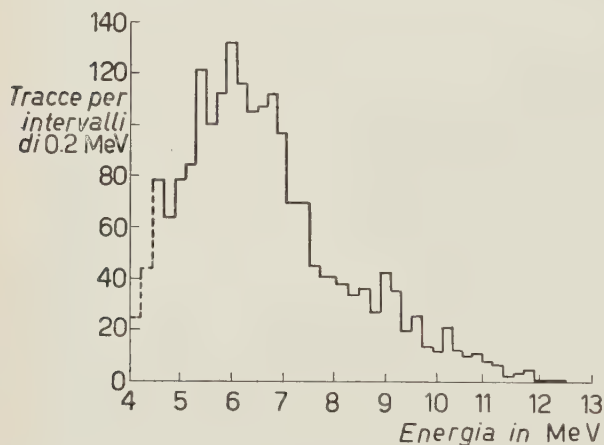


Fig. 7. - Distribuzione energetica di 1940 tracce di protoni da propano esposto a bremsstrahlung di 35 MeV [L 57].

sonanza di dipolo nel  $^{12}\text{C}$ . La distribuzione angolare dei protoni vicino al massimo va come  $a + b \sin^2 \theta$  ma a energie più alte vi è preferenza per gli angoli in avanti.

Sono state osservate 1940 tracce comprese entro gli angoli  $35^\circ \div 145^\circ$  (Fig. 7). Vi è un massimo principale a 6 MeV, altri massimi minori a 5.3 e 6.7 MeV (quest'ultimo corrispondente a un livello di 23.3 MeV nel  $^{12}\text{C}$ ); questi massimi non sono ben risolti e ciò probabilmente è dovuto al fatto che vi sono altri protoni che lasciano l' $^{11}\text{B}$  in stati eccitati, o protoni da reazione multipla del tipo  $(\gamma, pn)$ . A energia più alta sembra che vi sia un piccolo massimo a 9.0 MeV che corrisponderebbe ad una energia dei fotoni di  $25.8 \pm 0.2$  MeV qualora l' $^{11}\text{B}$  sia lasciato nello stato fondamentale.

Quanto alla distribuzione angolare si sono divisi i protoni in due gruppi: quelli con energia compresa tra 4.5 e 6.9 MeV che presentano una distribuzione della forma  $a + b \sin^2 \theta$  (Fig. 8) con  $a/b = 0.23 \pm 0.1$  e un'altro gruppo con energia



$> 7.0$  MeV la cui distribuzione angolare ha la forma  $a + b(\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$  con  $a/b = 0.5$  e  $p = 0.6$  mostrando quindi una marcata asimmetria in avanti con un massimo verso i  $60^\circ$ .

MILONE e coll. [M 57] esaminano con emulsioni nucleari la distribuzione angolare ed energetica dei fotoprotoni da C usando  $\gamma$  di bremsstrahlung da 31 MeV. Si trova che i fotoprotoni con energia  $> 5.5$  MeV hanno una distribuzione che va come  $0.6 + (\sin \theta + 0.6 \cdot \sin \theta \cos \theta)^2$  ossia una marcata asimmetria in avanti con un massimo a  $60^\circ$  (Fig. 9) mentre quelli di più bassa energia

Fig. 8. - Distribuzione angolare dei protoni da propano; gruppo I: protoni tra 4.5 e 6.9 MeV; gruppo II: protoni sopra 6.9 MeV (la curva tratteggiata mostra la funzione  $a + b(\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$ ) [L 57].

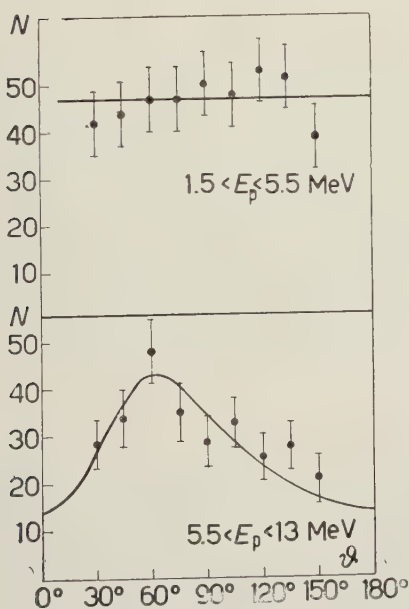
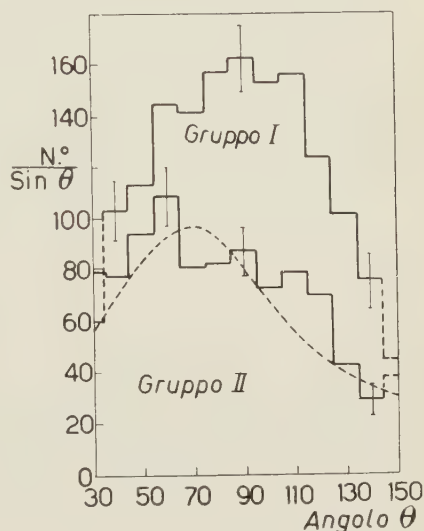


Fig. 9. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni da carbonio.  $N$  = numero di fotoprotoni osservati con energia  $E_p$  per unità di angolo solido in scala arbitraria [M 57].

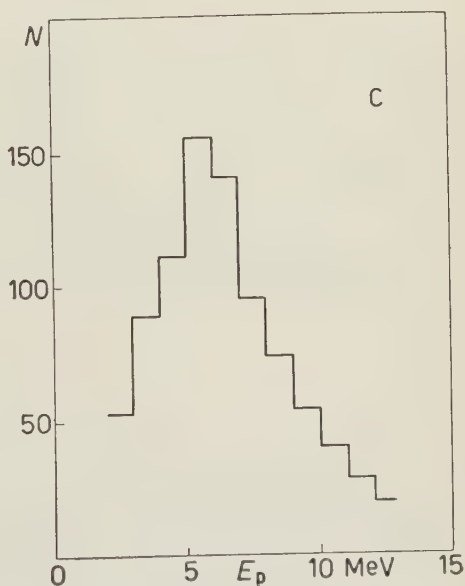


Fig. 10. - Distribuzione energetica dei fotoprotoni da carbonio.  $N$  = numero di protoni osservati per intervalli di 1 MeV [M 57].

sono distribuiti isotropicamente; lo spettro energetico mostra un massimo tra 5 e 6 MeV (Fig. 10) il che indica fortemente che si tratta di fotoeffetto diretto.

BARBER e coll. [B 58] misurano la distribuzione energetica ed angolare dei fotoprotoni bombardando il carbonio con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung da un acceleratore lineare di elettroni di cui variano l'energia da 20 a 44 MeV. Non riescono ad ottenere massimi ben risolti nella distribuzione energetica, ma la distribuzione al di sotto del massimo a 6 MeV sembra avere un andamento che potrebbe corrispondere alla struttura osservata nella curva di attivazione per la reazione  $(\gamma, n)$ . Lo stretto massimo trovato nella distribuzione energetica dei protoni a 6 MeV corrisponde all'assorbimento del fotone nella risonanza gigante seguito dalla transizione allo stato fondamentale dell' $^{11}\text{B}$ . Si notano anche massimi più piccoli a 8.5 e 13.5 MeV. La distribuzione angolare dei protoni in vicinanza di 6 MeV va bene con la  $1 + 1.3 \sin^2 \theta (1 + 0.3 \cos \theta)^2$ .

Anche PENNER e LEISS [P 58] trovano una distribuzione angolare per transizione allo stato fondamentale con protoni di 20 MeV fortemente asimmetrica rispetto a  $90^\circ$  e con un massimo in avanti, mentre per transizioni al primo stato eccitato (sempre con protoni di 20 MeV) è molto meno asimmetrica.

### $^{13}\text{C}(\gamma, n)$

COOK e TELEGGI [Te 56] esaminano i neutroni provenienti dal  $^{13}\text{C}$  bombardato con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung a 45 MeV. Si trovano due massimi distinti: a 14.0 e 23.5 MeV rispettivamente. La corrispondenza del secondo massimo con la risonanza gigante del  $^{12}\text{C}$  fa pensare che questo massimo sia dovuto ad assorbimento da parte del « core »  $^{12}\text{C}$ . Invece, il massimo più basso difficilmente si può attribuire alla transizione del neutrone  $p_{\frac{1}{2}}$  al continuo e non è chiaro se debba interpretarsi come una sovrapposizione di transizioni a livelli eccitati del  $^{13}\text{C}$  o come risonanza  $E2$  del tipo osservata anche in  $^{16}\text{O}(\gamma, p)$ .

### $^{13}\text{C}(\gamma, p)$

COOK, PENFOLD e TELEGGI [Ck 56] esaminano la sezione d'urto  $(\gamma, p)$  del  $^{13}\text{C}$  per vedere se oltre alla risonanza gigante vi è anche un'altra risonanza più bassa a 13.5 MeV. Questo perchè vi sono alcuni lavori sulla  $^{13}\text{C}(\gamma, n)$  (come quello visto di COOK e TELEGGI [Te 56]) che indicano un piccolo massimo a 13.5 MeV oltre a quello della risonanza gigante a 25 MeV e benchè considerazioni energetiche portino ad escludere che si tratti di un processo competitivo cosicchè la  $(\gamma, n)$  decrescerebbe perchè ad un certo punto s'innescerebbe la  $(\gamma, p)$ , si è voluto chiarire questo punto con una misura diretta della  $(\gamma, p)$ .

La rivelazione viene fatta attraverso i  $\gamma$  del  $^{12}\text{B}$  che hanno una energia massima di 13.43 MeV e con l'uso di  $\gamma$  di bremsstrahlung a 45 MeV. Si trova così un massimo molto largo di circa 8.8 mb a una energia di 25.5 MeV (invece per il  $^{12}\text{C}$  si ha un massimo molto stretto e più alto: 34 mb a 21.5 MeV). Combinando con i dati ottenuti della  $^{13}\text{C}(\gamma, p)$  i risultati noti della  $^{13}\text{C}(\gamma, n)$  e  $^{13}\text{C}(\gamma, xn)$  per vedere il comportameto della sezione d'assorbimento totale si trovano proprio due massimi rispettivamente a 13.5 e 25.5 MeV. Sicchè la diminuzione della  $\sigma(\gamma, n)$  dopo 13.5 MeV non è dovuta a processi competitivi. Il massimo a 13.5 MeV ha una sezione d'urto di 3.7 mb con una larghezza di  $\sim 6$  MeV mentre la risonanza gigante a 25 MeV ha un massimo di 17.4 mb con una larghezza di  $\sim 8.5$  MeV.

### $^{14}\text{N}(\gamma, n)$

HORSLEY e coll. [Ho 52] nello studio della reazione  $(\gamma, n)$  con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung del betatrone di Saskatchewan trovano un massimo iniziale che non può essere attribuito alla competizione della reazione  $(\gamma, np)$  ma piuttosto all'assorbimento  $E2$  e  $M1$ . Il primo massimo è piccolo ed è a 13 MeV, il secondo a 24 MeV (quest'ultimo ha  $\sigma_{\text{max}} = 2.84$  mb). Per decidere se la caduta della sezione d'urto dopo i 13 MeV sia dovuta ad  $E2$  e  $M1$  prima dell'inizio di  $E1$ , Horsley e coll. hanno misurato l'intensità dei neutroni in funzione dell'energia massima del betatrone; se la causa della diminuzione nella curva d'attivazione fosse dovuta all'innescarsi della reazione  $(\gamma, np)$  (la cui soglia è  $> 12$  MeV), questo abbassamento non dovrebbe essere presente nella curva che dà l'intensità neutronica (perchè in tal caso verrebbero rivelati i neutroni provenienti sia dalla  $(\gamma, n)$  che dalla  $(\gamma, np)$ ); poichè invece la curva che dà l'intensità dei neutroni ha lo stesso andamento della curva di attivazione, si deve concludere che la causa è dovuta alla variazione dell'assorbimento dei raggi  $\gamma$  con l'energia cioè, come si è detto, alla caduta dell'assorbimento  $E2$  e  $M1$  prima dell'inizio di  $E1$ .

### $^{14}\text{N}(\gamma, p)$

WRIGHT e coll. [Wr 56] usano raggi  $\gamma$  da un sincrotrone a 23 MeV mentre le fotodisintegrazioni vengono prodotte nel gas di una camera di Wilson. La distribuzione energetica dei protoni fino a 3 MeV, mostra massimi ben definiti a 0.51, 1.63 e 2.92 MeV mentre un gruppo più largo di protoni è centrato attorno 1.15 MeV. Queste energie corrispondono molto da vicino alle energie delle risonanze per la reazione  $^{13}\text{C}(p, \gamma)^{14}\text{N}$  (dove il  $^{14}\text{N}$  è lasciato allo stato fondamentale). Si trova che per queste risonanze i rapporti delle sezioni d'urto per le reazioni  $(\gamma, p)$  e  $(p, \gamma)$  sono in buono accordo con il principio del bilancio

dettagliato. Questo stretto accordo tra le reazioni  $^{14}\text{N}(\gamma, p)^{13}\text{C}$  e l'inversa, porta ad escludere che i protoni derivino dalla reazione  $^{14}\text{N}(\gamma, p\gamma')^{13}\text{C}$  o, per lo meno, il contributo di quest'ultima dovrà essere piccolissimo; perciò la presenza di gruppi ben definiti nella distribuzione energetica implica che questi fotoprotoni derivano da risonanze nell'assorbimento dei  $\gamma$  e quindi implicano una struttura fine della risonanza gigante.

LIVESEY [Li 57] studia i fotoprotoni con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\text{max}}$  di 30 e 70 MeV. Il comportamento dell'azoto è completamente diverso da quello dei due nuclei che lo circondano, il carbonio e l'ossigeno, pure esaminati da Livesey e questo dipende dalla soglia estremamente bassa della reazione  $(\gamma, p)$  nel  $^{14}\text{N}$  e per il gran numero di modi in cui possono essere emessi i protoni quando l'energia dei fotoni incidenti è  $> 20$  MeV. La risonanza è vicino a 22 MeV (e questo è in accordo con [Ho 52]); (FERGUSON e coll. [F 54] trovano che vicino a 22 MeV vi è anche una grande sezione d'urto per la reazione  $(\gamma, pn)$  paragonabile alla  $(\gamma, p)$ . Questo risultato è in accordo con le esperienze già viste fatte in camera di Wilson da WRIGHT e coll. [Wr 56] i quali trovano picchi ben definiti nella funzione d'eccitazione  $(\gamma, p)$ ).

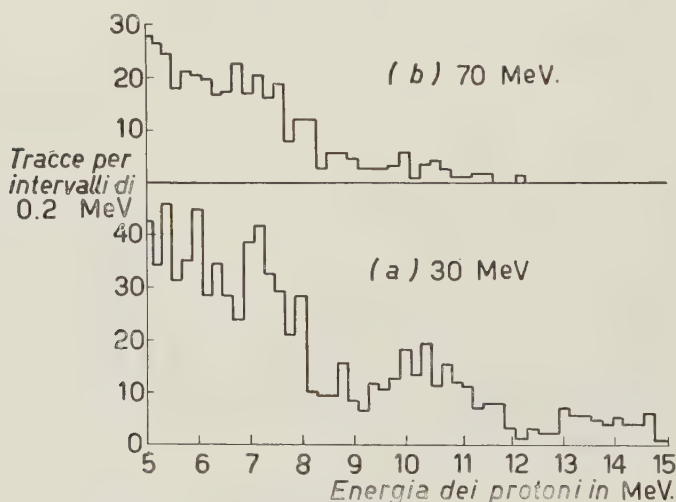


Fig. 11. — (a) Distribuzione energetica di 800 tracce di protoni da azoto irradiato con bremsstrahlung da 30 MeV. (b) Distribuzione di 384 tracce da azoto esposto a radiazione di 70 MeV [L 57].

La distribuzione energetica di 800 tracce nel caso di  $E_{\text{max}} = 30$  MeV è riportato in Fig. 11 (a) e si può notare un massimo piuttosto largo fra 10 e 11 MeV; anche tra 13 e 14 MeV sembra che vi sia un altro gruppo (pure questo largo); nella Fig. 11 (b) è data invece la distribuzione energetica di 384 tracce per il caso  $E_{\text{max}} = 70$  MeV: si può notare una certa somiglianza con la distribuzione di Fig. 11 (a).

Riassumendo si può dire che la reazione  $(\gamma, p)$  nel  $^{14}\text{N}$  presenta una risonanza di dipolo a  $(22.5 \pm 0.5)$  MeV che dà origine a un gruppo di protoni verso i  $(13.7 \pm 0.5)$  MeV che lasciano il nucleo residuo nello stato fondamentale mentre il gruppo di protoni tra 9.5 e 11.0 MeV è probabilmente dovuto alla sovrapposizione dei protoni provenienti dalle transizioni che lasciano il nucleo residuo  $^{13}\text{C}$  negli stati eccitati a 3.1, 3.7 e 3.9 MeV.

Le distribuzioni angolari sono misurate separatamente per i vari gruppi di protoni (Fig. 12). I protoni di energia tra 5.0 e 8.5 (relativi a  $E_{\text{max}} = 30$  MeV) hanno un massimo verso i  $90^\circ$  e presentano inoltre una leggera asimmetria in avanti mentre i protoni con energia  $> 8.5$  MeV (sempre relativi a  $E_{\text{max}} = 30$  MeV) hanno una distribuzione simmetrica attorno ai  $90^\circ$  della forma  $a + b \sin^2 \theta$ . Per  $E_{\text{max}} = 70$  MeV i protoni di energia tra 2.0 e 8.5 MeV hanno una distribuzione angolare isotropa.

JOHANSSON [J 58] studia lo spettro dei protoni per diversi valori dell'energia massima dei  $\gamma$  di bremsstrahlung. Lo spettro mostra massimi ben risolti che corrispondono a livelli che in molti casi sono già noti da altre reazioni.

Infine CORTINI e coll. [Ct 58] usano emulsioni nucleari per misurare lo spettro energetico dei protoni prodotti con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung a 18, 23 e 30 MeV. Alle più basse energie di bremsstrahlung trovano transizioni sia allo stato fondamentale che a stati eccitati del nucleo residuo mentre la maggior parte dei fotoprotoni prodotti dai  $\gamma$  da 23 a 30 MeV sembra da attribuirsi al processo  $(\gamma, np)$ .

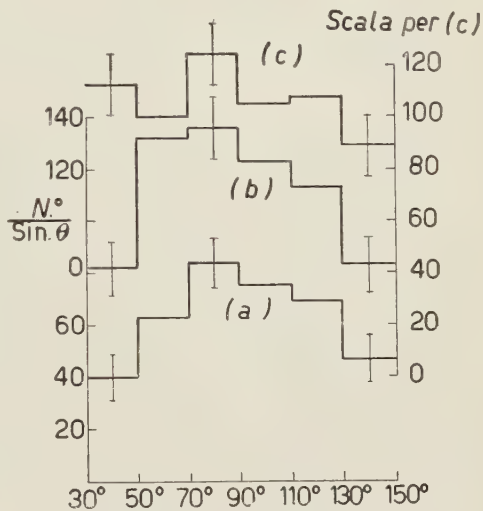


Fig. 12. - Distribuzione angolare di fotoprotoni da azoto: (a) protoni sopra 8.5 MeV (per  $E_{\text{max}} = 30$  MeV); (b) protoni tra 5.0 e 8.5 MeV (per  $E_{\text{max}} = 30$  MeV); (c) protoni tra 2.0 e 8.5 MeV ( $E_{\text{max}} = 70$  MeV) [L 57].

### $^{15}\text{N}(\gamma, p)$

RHODES e STEPHENS [R 58] hanno studiato la distribuzione angolare ed energetica in emulsioni nucleari dei fotoprotoni da  $^{15}\text{N}$  prodotti con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung di 18.7 e 24.6 MeV osservando una struttura fine della sezione d'urto in funzione dell'energia dei fotoni. La distribuzione angolare dei vari gruppi di protoni può mettersi nella forma  $a + b \sin^2 \theta (1 + p \cos \theta)^2$  con  $a/b =$



$-1.39 \pm 0.44$  per transizioni allo stato fondamentale e protoni da  $(1.8 \div 8.0)$  MeV, con  $a/b = 0.81 \pm 0.59$  per protoni tra  $(8.0 \div 9.3)$  MeV mentre per il gruppo di protoni tra 9.3 e 14 MeV la distribuzione angolare è in prevalenza  $\sin^2 \theta$  con  $a/b$  tra 0 e 0.26 e con coefficiente di asimmetria  $p = 0.24$ .

### $^{16}\text{O}(\gamma, n)$

HORSLEY e coll. [Ho 52] studiano col betatrone di Saskatchewan la sezione d'urto per la reazione  $(\gamma, n)$  nell'ossigeno con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung e trovano come già nel  $^{14}\text{N}$  un picco iniziale che non va attribuito all'innescarsi di un processo competitivo del tipo  $(\gamma, np)$  ma piuttosto alla caduta dell'assorbimento  $E2$  ed  $M1$  prima della salita dell'assorbimento di dipolo elettrico.

Tuttavia una delle prime esperienze in cui viene affacciata l'idea di una eventuale struttura fine nella sezione d'urto  $\sigma(\gamma, n)$  per la fotoreazione sull'ossigeno è quella di MONTALBETTI e KATZ [Mo 53]. In questa esperienza, in realtà, non si trova una struttura fine, ma si nota che la sezione d'urto mostra oltre all'usuale massimo della risonanza gigante, anche un piccolo massimo iniziale.

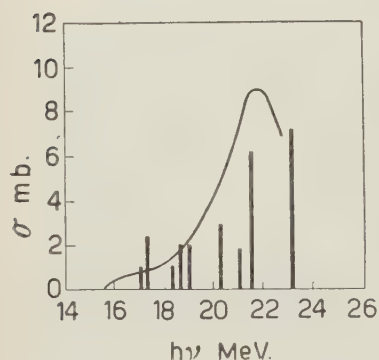


Fig. 13. — Sezione d'urto per la reazione  $^{16}\text{O}(\gamma, n)$ . Le linee verticali sono poste ad energie in cui la curva di attivazione mostra delle discontinuità mentre l'altezza delle linee rappresenta la grandezza di questi cambiamenti di pendenza [Mo 53].

Anzichè spiegare questo massimo iniziale con la solita interpretazione secondo la quale subito dopo la soglia del processo interviene il contributo della transizione di quadrupolo elettrico (che nel caso dell'ossigeno termina al di sotto dei 20 MeV [Pr 50]) che ne sarebbe responsabile, Montalbetti e Katz hanno l'idea di confrontare la curva che dà la sezione d'urto con i livelli discreti noti a quelle energie dedotti dalle discontinuità della curva di attivazione come dati da [Ha 52] (Fig. 13); così notano che l'intensità dei livelli rappresentati in Fig. 13 dall'altezza delle linee verticali segue molto da vicino l'andamento della curva che dà la sezione d'urto  $\sigma(\gamma, n)$ ; perciò Montalbetti e Katz pensano che la curva Fig. 13 rappresenti l'involuppo di livelli discreti non risolti.

Per provare questo KATZ e coll. fanno un'esperienza più dettagliata [K 54]. In questa trovano alcune discontinuità nella curva d'attivazione a 15.9, 16.4, 16.7, 17.1, 18.9, 19.3, 20.7, 21.9 MeV. Un'altra esperienza che conferma questi dati, ma basata questa volta sulla rivelazione diretta dei neutroni anzichè sulla curva d'attivazione, è quella di J. GOLDEMBERG [Gl 54].

Anche A. S. PENFOLD e B. M. SPICER [P 55] esaminano la reazione  $^{16}\text{O}(\gamma, n)^{15}\text{O}$  tra 15.6 e 23.2 MeV trovando una struttura fine; in prossimità del picco a 16.03 MeV trovano che la sezione d'urto mostra una risonanza con una larghezza di  $(18 \pm 5)$  keV. Altri picchi vengono interpretati come manifestazione di strette risonanze nella sezione d'urto.

In base ai calcoli sulle probabilità di transizione e quindi sulle larghezze radiative (GUTH [G 41]) Penfold e Spicer sono portati a concludere che al disotto di 19 MeV la reazione procede sulla base di assorbimento  $E2$  mentre tra 22 e 23 MeV soprattutto sulla base di assorbimento  $E1$ . Confrontando la sezione di urto a 17.63 MeV con quella che si ottiene usando raggi  $\gamma$  del litio si trova che a questa energia la sezione d'urto cade tra due massimi.

SPICER [Sp 57] ripete l'esperienza per vedere in maniera più semplice la struttura fine entro la risonanza gigante. La tecnica e l'apparato sono quelli usati da PENFOLD e SPICER [P 55], e le misure vengono fatte approssimativamente ogni 0.2 MeV a partire dalla soglia fino a 25.1 MeV. La sezione d'urto si ottiene dalla curva d'attivazione secondo il metodo di PENFOLD e LEISS

[Pe 54]. Al contrario di altri lavori, in cui secondo il metodo delle foto-differenze si fanno progressivi livellamenti o delle differenze prime che si ottengono dalla curva di attivazione, o della curva della sezione d'urto stessa, qui non si fa alcun livellamento (se ad esempio in questo caso si ricalcolasse la curva d'attivazione dopo aver livellato le differenze prime come fanno KATZ e CAMERON [Kt 51], si troverebbe un cambiamento di  $\sim 10\%$  tra 16 e 18 MeV.)

La Fig. 14 mostra la sezione d'urto calcolata ogni 1 MeV. La curva tratteggiata fino a 21 MeV si è ottenuta facendo il livellamento come Katz e Cameron. Il risultato è in accordo con quello di HORSLEY e coll. [Ho 52]. In Fig. 15 è mostrata la sezione d'urto calcolata ogni 0.5 MeV; è stata calcolata

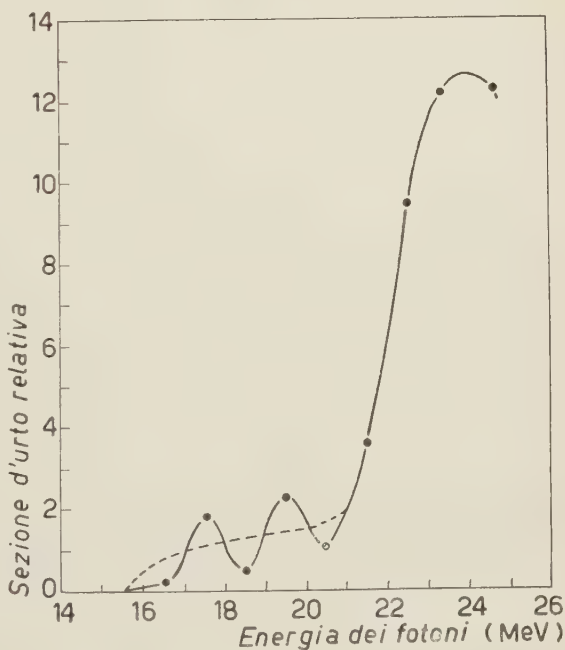
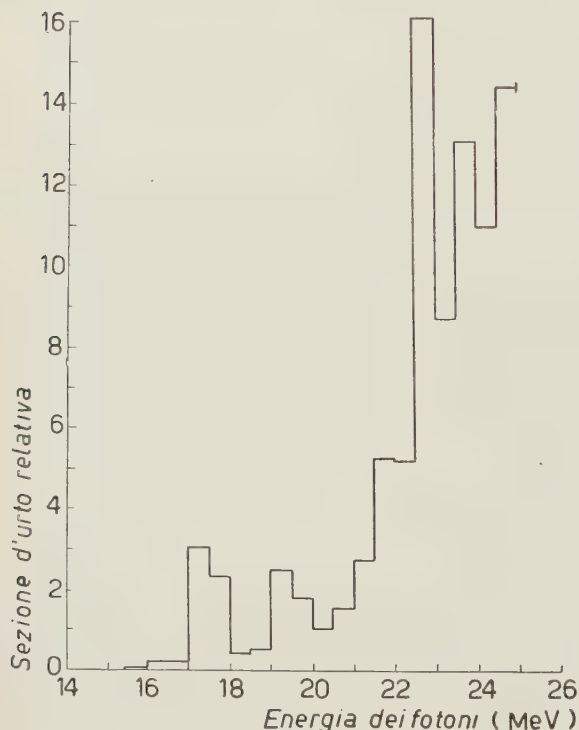


Fig. 14. - Sezione d'urto per la reazione  $^{16}\text{O}(\gamma, n)$  calcolata a intervalli di 1 MeV. (La curva tratteggiata è ottenuta con il procedimento di Katz e Cameron [Kt 51]) [Sp 57].

dalla stessa curva di attivazione senza fare alcun livellamento: l'andamento generale di questa curva è identico fino a 20 MeV con quello di Fig. 14. Sopra 20 MeV si trova invece ancora una struttura fine. Il piccolo massimo a 17 MeV



è compatibile con l'andamento dei livelli a quella energia come trovato nello studio della struttura fine da PENFOLD e SPICER [P 55]; anche il picco a 19 MeV è compatibile con un livello (meno certo) a 19.2 MeV.

Infine in una recentissima esperienza KATZ [K 58] trova ben 9 discontinuità nella curva d'attivazione comprese tra 15.60 e 17.18 MeV. Esse sono: 15.60, 15.85, 16.03, 16.47, 16.75, 16.95, 17.02, 17.13, 17.18, e indicano altrettanti livelli in  $^{16}\text{O}$ .

Fig. 15. - Sezione d'urto per la  $^{16}\text{O}(\gamma, n)$  calcolata a intervalli di 0.5 MeV [Sp 57].

### $^{16}\text{O}(\gamma, p)$

Per i fotoprotoni il materiale sperimentale è più abbondante rispetto a quello che si ha per i fotoneutroni da  $^{16}\text{O}(\gamma, n)$ .

Quanto alla distribuzione angolare SPICER [S 55] esamina i fotoprotoni da ossigeno in una regione di energia al disotto della risonanza gigante e precisamente tra 13.5 e 18.7 MeV. La distribuzione angolare indica che si ha prevalentemente assorbimento  $E2$  oppure  $M1$  (benchè la transizione  $E1$  sia permessa dalla regola di selezione dello spin isotopico). Essa è della forma  $56(1 + \cos^2 \theta)$  e cioè con un minimo verso i  $90^\circ$  (Fig. 16). Questa stessa forma per la distribuzione angolare la ottiene anche quando considera solo i protoni di energia  $< 3$  MeV.

Inoltre trova per la sezione d'urto un massimo a 14.7 MeV e questo risultato è utile per l'interpretazione di esperienze successive sulla struttura fine basata sulla distribuzione energetica dei fotoprotoni.

Infatti STEPHENS e coll. [St 55] e [S 56] esaminano la struttura fine nella  $^{16}\text{O}(\gamma, p)$  usando  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\text{max}} = 25$  MeV. L'osservazione viene fatta in emulsioni nucleari. Lo spettro energetico è mostrato in Fig. 17. Si ha che i protoni con energia  $> 6.5$  MeV possono essere emessi solo in transizioni allo stato fondamentale del  $^{15}\text{N}$ . I protoni di energia al disotto dei 6 MeV possono essere emessi sia in transizioni a livelli eccitati del  $^{15}\text{N}$  sia in seguito all'assorbimento di fotoni di energia  $< \sim 18$  MeV con transizione allo stato fondamentale del  $^{15}\text{N}$ . Il gruppo di protoni di 4.5 e 3.5 MeV può essere identificato con transizioni ai livelli 5.3 MeV e 6.3 MeV del  $^{15}\text{N}$  rispettivamente, mentre quello di 2.4 MeV sembra essere prodotto dalla transizione dalla risonanza osservata a 14.7 MeV allo stato fondamentale del  $^{15}\text{N}$ .

Si può così trasformare lo spettro energetico di Fig. 17 nella curva di sezione d'urto d'assorbimento in Fig. 18. Si ottiene una struttura fine nella re-

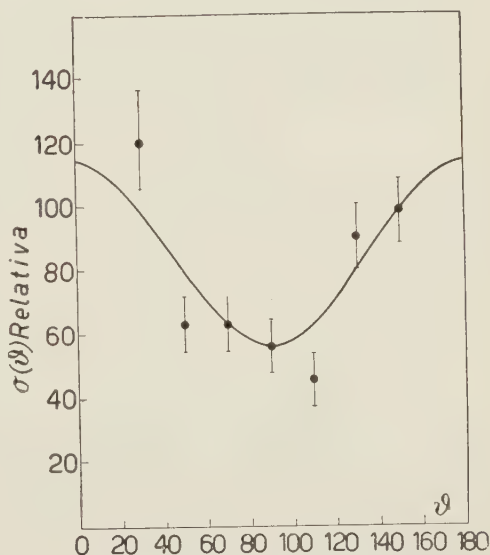


Fig. 16. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni. La curva è  $56(1 + \cos^2 \theta)$  [S 55].

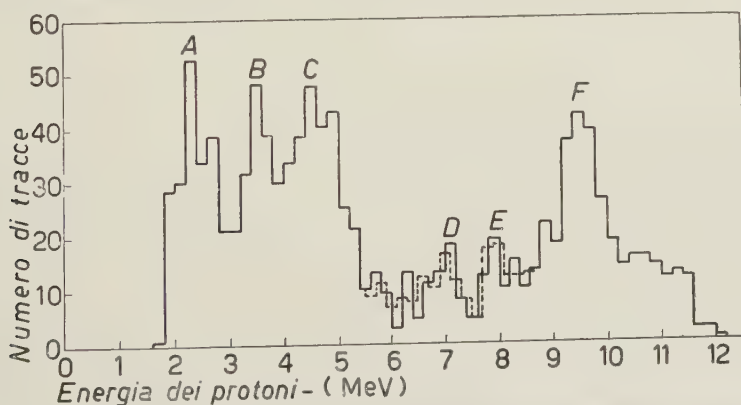


Fig. 17. - Distribuzione energetica di 1123 fotoprotoni da ossigeno [St 55] e [Co 56].

gione della risonanza gigante. La risonanza principale a 22.4 MeV e la struttura fine a 19.6 e 20.6 MeV racchiudono quello che usualmente si chiama risonanza gigante.

Anche COHEN e coll. [Co 56] studiano la distribuzione energetica dei fotoprotoni usando raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\max} = 25$  MeV e rivelandoli in emulsione nucleare. La Fig. 17 mostra che vi sono diversi gruppi di protoni chiaramente distinti; in particolare gli ultimi tre gruppi (quelli indicati con  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,) consistono sicuramente di protoni emessi nella transizione allo stato fondamentale  $\frac{1}{2}^-$  del  $^{15}\text{N}$  perchè transizioni a stati più elevati non possono produrre

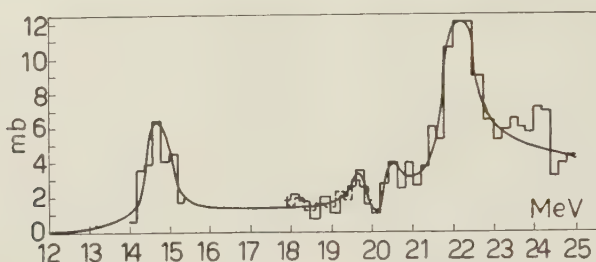


Fig. 18. - Sezione d'urto in funzione dell'energia per transizioni allo stato fondamentale del  $^{15}\text{N}$  [St 55].

protoni di energia  $> 6.5$  MeV. Per quello che si è detto, ciascuno di questi gruppi deve corrispondere a una risonanza nella sezione d'urto d'assorbimento dei fotoni.

Quanto ai gruppi  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , sempre di Fig. 17 questi possono derivare sia da transizioni a stati eccitati del  $^{15}\text{N}$  (a 5.3, 6.3, e 7.3 MeV) sia anche da risonanze in assorbimento di fotoni di minore energia e successivo decadimento allo stato fondamentale del  $^{15}\text{N}$ . Poichè l'esperienza precedente di SPICER [S 55] di cui si è detto sopra mostra una risonanza a 14.7 MeV (che WILKINSON [Wi 55] attribuisce ad assorbimento  $E2$ ) sembra di poter attribuire i protoni del gruppo  $A$  a questa risonanza. Siccome il gruppo  $A$  presenta una distribuzione angolare quasi isotropa, sembra che si possa pensare che ciò sia dovuto alla sovrapposizione di una distribuzione del tipo  $1 + \cos^2 \theta$  trovata da SPICER [S 55] con una distribuzione del tipo  $1 + \sin^2 \theta$  che potrebbe derivare dai protoni d'onda  $p$  nella transizione dallo stato  $1^-$  di risonanza gigante del  $^{16}\text{O}$  allo stato  $\frac{3}{2}^+$  del  $^{15}\text{N}$  che è uno stato eccitato a 7.3 MeV.

Inoltre il gruppo  $B$  sembra derivare da transizioni allo stato  $\frac{3}{2}^-$  di 6.3 MeV del  $^{15}\text{N}$ . Questo perchè si nota una intensa emissione di raggi  $\gamma$  associati con il livello 6.3 MeV. Poichè misure recenti di raggi  $\gamma$  emessi nella fotodisintegrazione dell'ossigeno [Sv 56] indicano una forte emissione di raggi  $\gamma$  da 6.3 MeV associata con la  $^{16}\text{O}(\gamma, p)$  e  $^{16}\text{O}(\gamma, n)$ , sembra che si possa dedurre una grande probabilità di transizione allo stato  $\frac{3}{2}^-$  a 6.3 MeV rispetto alle transizioni agli stati di 5.3 e 7.3 MeV e sembra che il gruppo  $B$  appartenga proprio a queste transizioni favorite.



Il gruppo  $C$  è invece di origine assai incerta. Esso può provenire sia da transizioni allo stato 6.3 MeV sia da assorbimento di fotoni da parte di un particolare livello in  $^{16}\text{O}$  che si troverebbe vicino a 17 MeV. I lavori di JOHANSSON e FORKMAN [Jo 55] sembrano indicare l'esistenza di tale livello (Fig. 19) (essi usano raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\text{max}} = 21$  MeV) ma non così invece le misure di Spicer.

Per concludere questa notevole esperienza che dà indicazioni così significative sulla struttura fine (Fig. 18) della risonanza gigante, osserveremo che nel caso della transizione dallo stato  $1^-$  del  $^{16}\text{O}$  a quello fondamentale  $\frac{1}{2}^-$  del  $^{15}\text{N}$ , si possono avere sia protoni  $d$  che protoni  $s$  ossia con  $l = 2$  o  $l = 0$ .

Tuttavia i protoni  $l = 2$  dovrebbero essere ostacolati

dalla barriera centrifuga e si dovrebbe avere allora una distribuzione angolare isotropa dovuta ai protoni con  $l = 0$ . L'esperienza invece dà una distribuzione angolare con un massimo a  $90^\circ$  (Fig. 20); questo massimo indica un notevole

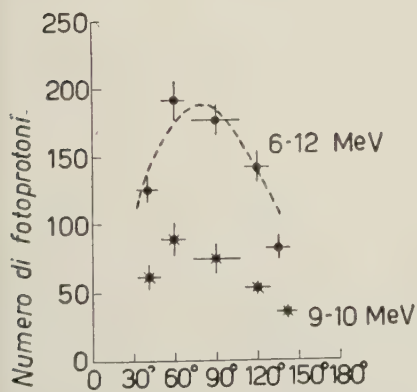


Fig. 20. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni ad alta energia da  $^{16}\text{O}$  [Co56].

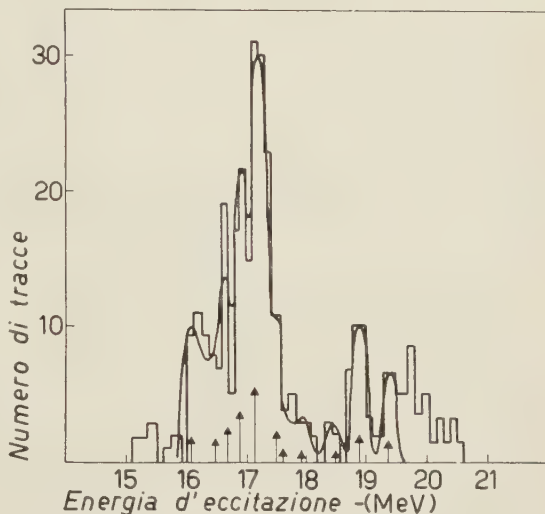


Fig. 19. - Distribuzione energetica dei protoni da  $^{16}\text{O}$ . La curva dà la distribuzione calcolata dalle discontinuità nella curva di attivazione ( $\gamma, n$ ). Le frecce indicano la posizione delle discontinuità [Jo 55].

numero di protoni di momento angolare  $\neq 0$ . Un tale numero di protoni  $d$  è stato osservato anche in carbonio da HALPERN e coll. [H 52]. Un modello che rende conto di un tale aumento è quello a particelle indipendenti proposto da Wilkinson. Come è ben noto in questo modello si suppone che il nucleo iniziale sia ben descritto da uno stato di modello a shell. Le transizioni permesse per assorbimento di un fotone sono quelle per cui non più di una particella nucleare cambia la sua configurazione.

In particolare un protone dall'ultima orbita  $l$  è elevato ad un orbita  $l+1$  per assorbimento di dipolo elettrico. Se

questo protone eccitato è emesso prima di interagire col resto del nucleo egli trasporterà con sé naturalmente  $l + 1$  unità di momento angolare lasciando il nucleo risultante in uno stato parente, intendendo per stati parenti quegli stati del  $^{15}\text{N}$  responsabili dello stesso stato in  $^{16}\text{O}$  (v. introduzione).

Nel caso dell'ossigeno, saranno probabili solo quelle transizioni a quegli stati di  $^{15}\text{N}$  che sono parenti dello stato fondamentale dell'ossigeno. Poichè le transizioni coinvolgono protoni nell'orbita  $p_{\frac{1}{2}}$  o  $p_{\frac{3}{2}}$  di  $^{16}\text{O}$  eccitati a  $d_{\frac{5}{2}}$  o  $d_{\frac{3}{2}}$ , vi sono solo due parenti in  $^{15}\text{N}$  (sia in accoppiamento  $jj$  che in accoppiamento  $LS$ ) cioè lo stato fondamentale  $\frac{1}{2}^-$  e lo stato eccitato  $\frac{3}{2}^-$  a 6.3 MeV. Come si è già detto i presenti dati sull'ossigeno combinati con le osservazioni di SVANTESSON [Sv 56] sui raggi  $\gamma$  da 6.3 MeV sono compatibili con questo modello.

Altre due belle esperienze sono quelle di LIVESEY [Li 56] e JOHANSSON e FORKMAN [J 57]. LIVESEY [Li 56] studia la distribuzione angolare ed energetica dei fotoprotoni dell'ossigeno rivelando i protoni con le emulsioni nucleari e usando raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung a tre diverse energie massime e cioè rispettivamente a 30, 39 e 70 MeV.

Lo studio viene fatto appositamente su un nucleo leggero quale l'ossigeno per evitare che la barriera coulombiana alteri considerevolmente la distribuzione energetica come avviene nel caso dei nuclei medi e pesanti. D'altra parte le esperienze fatte su questi nuclei medi e pesanti tra il magnesio e il rame come quelle di [B 51], [D 50], [Da 55], [To 51], mostrano che la teoria del nucleo composto spiega le caratteristiche principali dell'emissione.

Nei nuclei leggeri invece dove l'effetto della barriera coulombiana è trascurabile e non altera sostanzialmente la distribuzione energetica, è interessante vedere gli effetti dovuti agli stati eccitati noti del nucleo residuo. Così nel caso della reazione  $(\gamma, p)$  nel  $^{16}\text{O}$ , il nucleo residuo è  $^{15}\text{N}$  ed è noto che questo non ha livelli tra lo stato fondamentale e gli stati eccitati oltre 5 MeV (il primo livello eccitato del  $^{15}\text{N}$  è infatti di 5.28 MeV) cosicchè per energie del fotone a 5 MeV dalla soglia di emissione dei protoni (che è a  $\sim 12.1$  MeV), il nucleo residuo  $^{15}\text{N}$  deve essere lasciato nel suo stato fondamentale per cui la distribuzione energetica di questi protoni riproduce l'andamento della funzione di eccitazione per questa reazione.

Si è già detto che SPICER [S 55] trova un picco nella funzione d'eccitazione a 14.7 MeV mentre altri picchi sono stati rivelati da JOHANSSON e FORKMAN [Jo 55] e STEPHENS e coll. [St 55]; tutte queste misure sono fatte per  $E_{\text{max}}$  che non superano i 25 MeV. Invece LIVESEY [Li 56] vuole studiare la risonanza di dipolo più in dettaglio per riuscire a localizzare la posizione di eventuali picchi entro la risonanza principale così come è stato già fatto da KATZ e coll. [K 54] per la  $(\gamma, n)$ . Estende le misure oltre la zona della risonanza gigante studiando in emulsione nucleare, come si è già detto, la distribuzione energetica dei protoni con energia  $> 5$  MeV per tre diverse  $E_{\text{max}}$  del betatrone e preci-

samente a 30, 35 e 70 MeV, analizzando poi la distribuzione angolare dei vari gruppi tra  $35^\circ$  a  $145^\circ$ .

Nelle precedenti esperienze della  $(\gamma, p)$  in  $^{16}\text{O}$  dove l' $E_{\text{max}}$  non supera i 25 MeV, si è visto che la distribuzione energetica dei protoni con energia  $> 5$  MeV è dovuta ai processi che lasciano il  $^{15}\text{N}$  nello stato fondamentale; se la misura viene estesa a energie più alte, c'è la possibilità che a questa distribuzione contribuiscano anche gli stati eccitati del  $^{15}\text{N}$ , ma questa è solo una piccola probabilità se si tiene presente che la funzione d'eccitazione cade molto rapidamente dopo la risonanza a 22 MeV. D'altra parte se la funzione d'eccitazione mostra dei massimi in questa regione oltre la risonanza, questi si rifletteranno in massimi nella distribuzione energetica dei protoni a più bassa energia dove intervengono anche gli stati eccitati del  $^{15}\text{N}$ . Per questo è importante studiare prima la distribuzione energetica dei protoni a più alta energia per poi passare alla discussione delle distribuzioni a più bassa energia.

Per vedere meglio il significato dei vari massimi si sono sfruttate le distribuzioni riguardanti  $E_{\text{max}}$  di 30 e 35 MeV in un unico istogramma (Fig. 21) che conferma l'esistenza di almeno tre gruppi di energia (*a*, *b*, *c*):

Gruppo	Energia del protone	Picco dell'energia del fotone
<i>a</i>	$7.5 \div 9.5$	$20.7 \pm 0.2$
<i>b</i>	$8.6 \div 10.4$	$21.9 \pm 0.2$
<i>c</i>	10.5 e oltre	$24.0 \pm 0.2$

sembra anche che vi sia un picco a 13 MeV nella distribuzione energetica dei protoni che corrisponderebbe a una energia dei fotoni di  $\sim 26$  MeV.

Alcuni protoni con energia  $< 7.5$  MeV possono aver lasciato il nucleo residuo  $^{15}\text{N}$  in uno stato eccitato; tuttavia guardando le abbondanze delle tracce dei gruppi *a* e *c* si può essere sicuri che il gruppo *a* non è stato originato in questo modo ed è proprio dovuto ad un picco genuino, ossia a una risonanza nell'assorbimento, entro la risonanza principale; non si può però escludere che alcune tracce del gruppo *a* originate nell'esperienza con  $E_{\text{max}} = 35$  MeV siano dovute a stati eccitati del  $^{15}\text{N}$ .

Le posizioni dei picchi *a* e *b* sono d'accordo con le esperienze di KATZ e coll. [K 54] che esaminano le discontinuità nelle curve di attivazione per il processo  $(\gamma, n)$  e anche le esperienze a più alta risoluzione come quelle di PENFOLD [Pe 55] mostrano delle discontinuità in questa regione e sono ben visibili due gruppi distinti attorno a 21.2 MeV e 22.6 MeV. Il fatto che questi due picchi siano 0.5 volte più alti di quelli trovati in questa esperienza di [Li 56] può essere dovuto alla difficoltà della calibrazione dell'energia del betatrone.

Il risultato importante è tuttavia che si può confermare con sicurezza l'esistenza di una struttura fine entro la risonanza gigante.

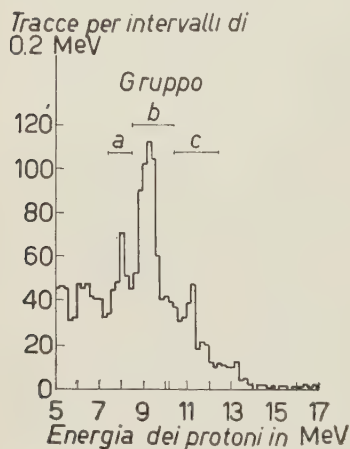


Fig. 21. - Distribuzione energetica per tutti i protoni per  $E_{\max} = 30$  e  $35$  MeV [Li 56].

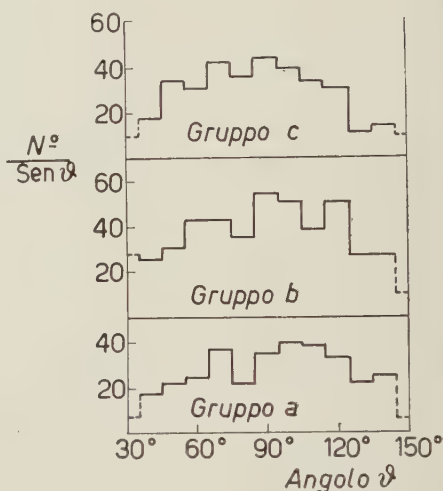


Fig. 22. - Distribuzione angolare dei protoni per i gruppi  $a$ ,  $b$  e  $c$  [Li 56].

La natura delle risonanze viene poi studiata anche per mezzo delle distribuzioni angolari dei protoni alle varie energie e vengono dati in Fig. 22 i risultati di tre gruppi a 30 e 35 MeV. Si nota un massimo intorno ai  $90^\circ$  ma i protoni a più alta energia tendono ad avere un picco in avanti vicino a  $80^\circ$  mentre il gruppo  $a$  ha un picco vicino a  $110^\circ$ .

Questa asimmetria attorno alla perpendicolare al fascio si vede anche confrontando il numero di tracce rivelate tra  $35^\circ$  e  $85^\circ$  (in avanti) con quella tra  $95^\circ$  e  $135^\circ$  (all'indietro).

Gruppi	In avanti	Indietro
$a$	$105 \pm 10$	$136 \pm 12$
$b$	$230 \pm 15$	$235 \pm 15$
$c$	$210 \pm 15$	$147 \pm 12$

La statistica non permette conclusioni dettagliate ma sembra probabile un cambiamento di forma nella distribuzione angolare dei protoni al variare dell'energia del fotone attraverso la regione della risonanza. Inoltre si può dire che, poichè i risultati a 30 e 35 MeV sono molto simili tra loro, è da escludere che gli stati eccitati del  $^{15}\text{N}$  li influenzino in misura visibile. La distribuzione



mediata sugli angoli supplementari in maniera da eliminare gli effetti asimmetrici è della forma  $a + b \sin^2 \theta$  con  $a/b = 0.1 \pm 0.05$ .

Notiamo infine che l'esperienza con  $E_{\max} = 70$  MeV mostra per i protoni di energia  $> 10.5$  MeV una asimmetria in avanti del tipo  $a + b(\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$  con  $a/b = 0.2$  e  $p = 0.2$  il che fa vedere la presenza di un piccolo termine di quadrupolo.

La media di tutti i dati dà una sezione d'urto parziale  $(\gamma, p)$  per la transizione allo stato fondamentale del  $^{15}\text{N}$  che raggiunge un picco di 10 mb a  $\sim 22$  MeV e un altro di 5 mb a 24 MeV con una sezione d'urto integrata tra 20 e 25 MeV di  $\sim 20$  MeV mb.

Concludendo e riassumendo i risultati ottenuti da [Li 56] si ha:

a) La sezione d'urto presenta un massimo a  $(21.9 \pm 0.2)$  MeV e picchi minori (struttura fine) a 20.7 e 24.0 MeV.

b) La sezione d'urto parziale integrata per transizioni allo stato fondamentale del  $^{15}\text{N}$  è di  $\sim 20$  MeV mb (integrata tra 20 e 25 MeV).

c) La distribuzione angolare dei protoni è anisotropa con preferenza di emissione ad angolo retto con il fascio.

d) La distribuzione angolare mediata sugli angoli supplementari mostra un andamento proporzionale a  $\sin^2 \theta$  per protoni  $> 7.5$  MeV.

e) I protoni con energia  $> 10.5$  MeV mostrano un picco in avanti nella distribuzione angolare.

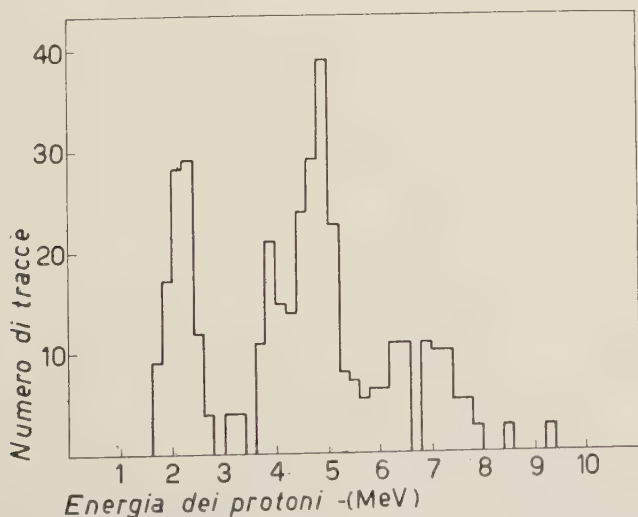


Fig. 23. - Spettro dei protoni per  $E_{\max} = 20.5$  MeV [J 57].

Anche JOHANSSON e FORKMAN [J 56] e [J 57] fanno una analisi dettagliata in emulsione nucleare della distribuzione angolare ed energetica dei fotopro-



toni da  $^{16}\text{O}$  con tre diverse  $E_{\text{max}}$ : 20.5, 23 e 26 MeV rispettivamente. Tutti e tre gli spettri energetici mostrano una ben marcata struttura fine (Fig. 23, 24, 25).

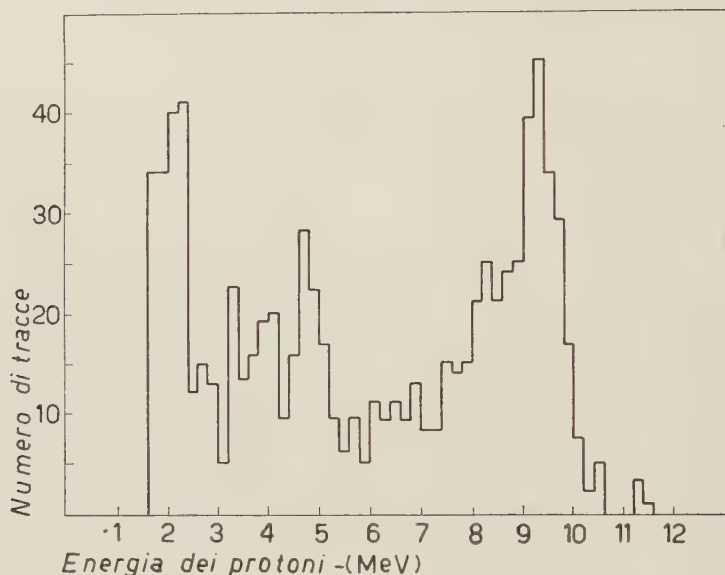


Fig. 24. - Spettro dei protoni per  $E_{\text{max}} = 23$  MeV [J 57].

Questa struttura è ovviamente dovuta sia a risonanze nell'assorbimento dei fotoni sia alla emissione a vari stati eccitati del  $^{15}\text{N}$ . Per interpretare bene conviene cominciare dall'analisi dello spettro fotonico ottenuto bombardando

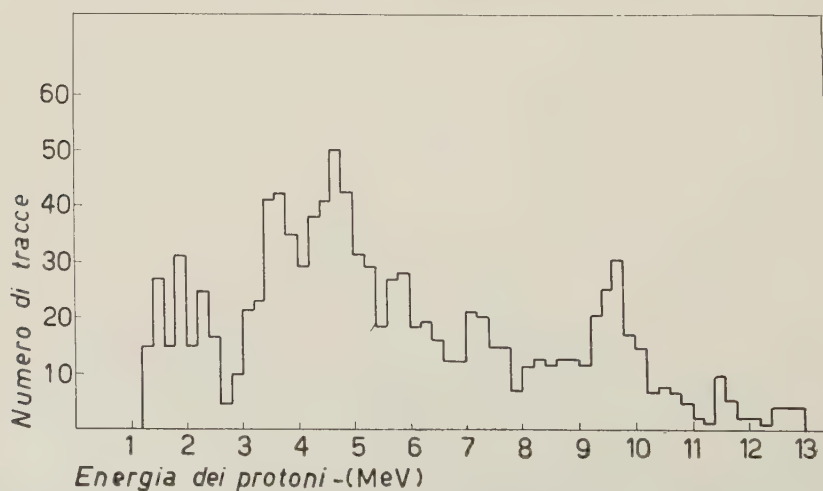


Fig. 25. - Spettro dei protoni per  $E_{\text{max}} = 26$  MeV [J 57].

all'energia più bassa: in questo caso (con  $E_{\max} = 20.5$  MeV) si può essere sicuri che i protoni lasciano il  $^{15}\text{N}$  nello stato fondamentale per cui ogni picco nello spettro fotonico corrisponde a una risonanza nell'assorbimento dei fotoni. Aumentando  $E_{\max}$ , lo spettro dei protoni diventa più complesso; tuttavia conoscendo le risonanze più basse si può calcolare il contributo dovuto a queste e sottrarlo. In questo modo è possibile risolvere lo spettro dei protoni passo per passo usando diverse energie di bombardamento. La Fig. 20 mostra l'andamento della sezione d'urto, in unità arbitrarie, ottenuta dalla distribuzione energetica dei protoni (per  $E_{\max} = 20.5$  MeV) confrontata con quella ottenuta dalle curve di attivazione della reazione  $(\gamma, n)$  di KATZ e coll. [K 54] e PENFOLD e SPICER [P 55]. L'accordo è sorprendentemente buono: d'altra parte il fatto che l'altezza relativa dei picchi sia in accordo con la sezione d'urto integrata per le risonanze come calcolate dalle discontinuità della curva d'attivazione mostra che l'accordo non è accidentale.

Note le risonanze al di sotto di 20 MeV si può risolvere lo spettro della Fig. 20 ottenuto con  $E_{\max} = 23$  MeV. Si è per questo sottratto lo spettro ottenuto con  $E_{\max} = 20.5$  MeV dopo averlo trasformato a 23 MeV (usando la distribuzione di SCHIFF [S 46]) da quello ottenuto con  $E_{\max} = 23$  MeV.

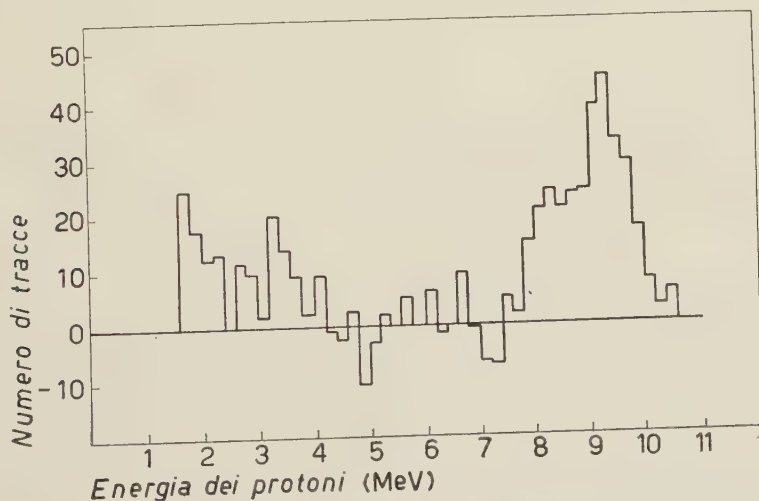


Fig. 26. - Spettro dei protoni corrispondente ad assorbimento dei fotoni con energia tra 20.5 e 23 MeV [J 57].

I protoni di energia compresi tra 6.2 e 7.8 MeV sono quelli che corrispondono a transizioni allo stato fondamentale e i due spettri (quello di 23 MeV e quello trasformato di 20.5 MeV) mostrano, come ci si deve attendere, lo stesso andamento. Dopo la sottrazione si ottiene lo spettro di Fig. 26 che corrisponde all'assorbimento di fotoni con energia tra 20.5 e 23 MeV. La maggior

parte dei protoni ( $\sim 70\%$ ) mostra un largo picco tra 8 e 10 MeV; la parte dello spettro tra 4 e 8 MeV è poco significativa per gli errori statistici introdotti dalla sottrazione mentre il gruppo di protoni tra 1.5 e 4 MeV deve corrispondere a transizioni agli stati eccitati del  $^{15}\text{N}$ . Il fatto che il limite superiore di questo gruppo sia 4 MeV sembra indicare che questi protoni corrispondono a transizioni, allo stato 6.3 MeV del  $^{15}\text{N}$ .

Allo stesso modo si è fatta la differenza tra gli spettri a 26 e 23 MeV e la Fig. 27 mostra lo spettro dei protoni provenienti dall'assorbimento di fotoni

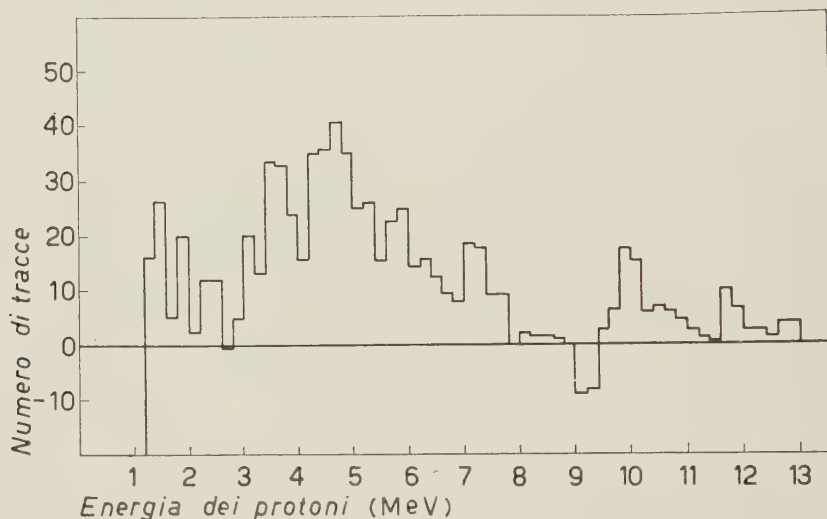


Fig. 27. - Spettro dei protoni corrispondente ad assorbimento dei fotoni con energia tra 23 e 26 MeV [J 57].

tra 23 e 26 MeV; ciò va d'accordo con transizioni agli stati eccitati del  $^{15}\text{N}$  di 6.3 e 7.3 MeV, mentre non vi è evidenza di un gruppo che corrisponda a transizioni ai primi due stati eccitati. L'identificazione dei vari gruppi di protoni permette la costruzione della sezione d'urto per la reazione  $(\gamma, p)$  in  $^{16}\text{O}$  (Fig. 28).

Il confronto di questa  $(\gamma, p)$  con la  $(\gamma, n)$  mostra che gli andamenti generali sono abbastanza simili; si trovano due discontinuità nelle curve di attivazione a 20.7 e 21.9 MeV come già [K 54] per la  $(\gamma, n)$ . Non sembra invece confermato il valore del massimo attorno a 14.5 MeV dato da SPICER [S 55]. È vero che si nota anche un picco a 14.5 MeV ma questo tuttavia non raggiunge il valore di 6 MeV mb dato da SPICER [S 55] per la sezione d'urto integrata, essendo quest'ultimo più di 3 volte maggiore di quello ottenuto qui; occorre anche dire che parte dei protoni assegnati a questo livello potrebbe invece provenire da transizioni dalla risonanza a circa 20 MeV al primo stato eccitato del  $^{15}\text{N}$  di 5.3 MeV.

[J 57] suggeriscono di studiare la reazione inversa  $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$  per vedere di risolvere le discrepanze col lavoro di [S 55]. È importante fare un confronto

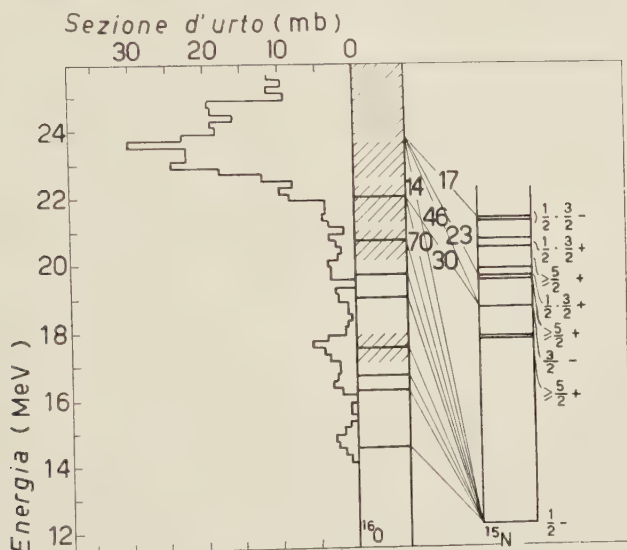


Fig. 28. - Livelli per la fotodisintegrazione di  $^{16}\text{O}$ . La sezione d'urto è riportata a sinistra [J 57].

tra le sezioni d'urto  $(\gamma, p)$  e  $(\gamma, n)$  per le informazioni che se ne possono trarre sulla indipendenza dalla carica delle forze nucleari (v. GELL-MANN e TELEGDI [G 53]); se le forze nucleari sono indipendenti dalla carica allora le sezioni d'urto  $(\gamma, p)$  e  $(\gamma, n)$  devono essere identiche per ogni stato individuale in funzione dell'angolo e dell'energia, a parte le correzioni che si devono fare per il fattore di penetrazione della barriera.

Il confronto con i risultati teorici mostra che l'ipotesi dell'indipendenza dalla carica non è in contrasto con i risultati sperimentali ma a ciò non si deve attribuire un peso eccessivo a causa degli errori dei valori sperimentali.

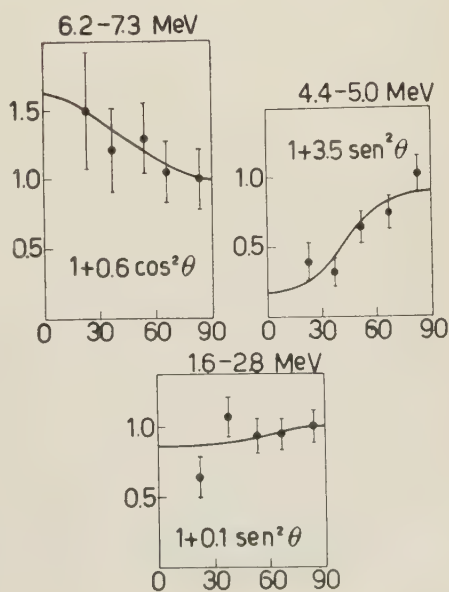


Fig. 29. - Distribuzione angolare per i gruppi di protoni nel caso di  $E_{\text{max}} = 20.5$  MeV [J 57].

Si trova che per energie tra 16.5 e 18.9 MeV l'accordo migliore lo si ha per  $l = 1$  mentre per energie tra 20.5 e 24.0 MeV lo si ha per  $l = 0$ .

Vediamo invece di confrontare i risultati con i due modelli usuali quello del nucleo composto e quello di WILKINSON [W 55]. Le distribuzioni angolari dei vari gruppi di protoni sono mostrate in Fig. 29, 30 e 31. Il gruppo di protoni proveniente dalla risonanza a 17 MeV ha una distribuzione angolare della forma  $1 + 3.5 \sin^2 \theta$ . Assumendo che venga formato un ben determinato stato

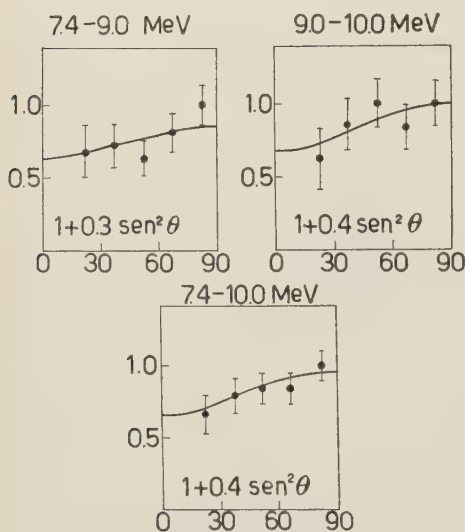


Fig. 30. — Distribuzione angolare per i gruppi di protoni nel caso di  $E_{\max} = 23$  MeV [J 57].

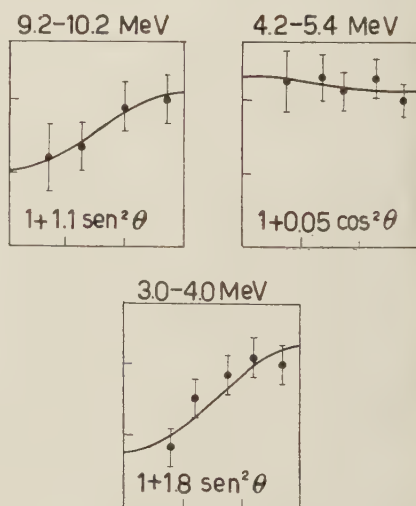


Fig. 31. — Distribuzione angolare per i gruppi di protoni nel caso di  $E_{\max} = 26$  MeV [J 57].

intermedio [J 57] calcolano le distribuzioni angolari con l'uso dell'accoppiamento  $LS$ . Si trova che la distribuzione angolare è in accordo con assorbimento  $E1$  o  $M1$  mentre  $E2$  è escluso. Tuttavia con  $E1$  non si spiega bene l'alta percentuale della componente  $\sin^2 \theta$  che corrisponde a emissione di onda  $d$  e che col modello del nucleo composto dovrebbe pesare molto meno; inoltre l'emissione con  $l = 2$  non sarebbe favorevole all'ipotesi dell'indipendenza dalla carica perchè con questo  $l$  il rapporto  $(\gamma, p)/(\gamma, n)$  sarebbe molto più grande del valore sperimentale. Se l'assorbimento è  $M1$  si ha emissione con  $l = 1$  è perciò non si ha la difficoltà suddetta. La teoria di Wilkinson predice emissione in onda  $d$  con una distribuzione  $1 + 1.5 \sin^2 \theta$  che è quindi in accordo con quella sperimentale ma presenta la difficoltà circa la indipendenza dalla carica.

Per il gruppo di protoni provenienti dalla risonanza a 19 MeV la distribuzione angolare ha la forma  $1 + 0.6 \cos^2 \theta$  che esclude  $E1$ . Un buon andamento



lo si ha con  $E2$  ma anche  $M1$  può mettersi in accordo con un opportuno aggiustamento dei contributi dai due canali di spin.

Nella zona della risonanza gigante si assume che l'assorbimento abbia carattere  $E1$ . Non è possibile risolvere risonanze separate e lo spettro dei protoni è composto di gruppi corrispondenti ai vari livelli del  $^{15}\text{N}$ ; d'altra parte non è possibile predire accuratamente sulla base del nucleo composto i rapporti relativi dei vari gruppi di protoni perchè la probabilità di transizione dipende fortemente dal fattore di penetrazione che a sua volta dipende da  $l$  il quale dipende dal valore degli spin e parità dei livelli del  $^{15}\text{N}$  che non sono molto ben noti. La teoria di Wilkinson invece prevede transizioni solo agli stati parenti del  $^{15}\text{N}$  che sono due: quello fondamentale e quello a 6.3 MeV. La possibilità di transizione agli altri livelli corrisponde al caso in cui l'energia d'eccitazione è divisa tra due o più nucleoni.

Altre informazioni circa l'emissione dei protoni si hanno dalla distribuzione angolare sperimentale (Fig. 31) che ha la forma  $1 - 1.1 \sin^2 \theta$  per le transizioni allo stato fondamentale. Secondo il modello del nucleo composto tale distribuzione può interpretarsi come mistura di onde  $s$  e  $p$ , mentre è anche in accordo con la distribuzione prevista da WILKINSON ( $1 + 1.5 \sin^2 \theta$ ).

Per l'altro gruppo di protoni derivante dalla transizione al livello 6.3 MeV, la distribuzione angolare sperimentale è quasi isotropa. Questo è in netto contrasto con la predizione della teoria di Wilkinson mentre è in accordo col modello del nucleo composto che prevede per questi protoni di bassa energia una piccolissima quantità di onda  $d$  del fattore di penetrazione.

Per i protoni che lasciano il  $^{15}\text{N}$  nella zona dei livelli a 7 MeV si trova una distribuzione angolare sperimentale di  $1 + 1.8 \sin^2 \theta$  che si può bene interpretare sulla base del nucleo composto.

In conclusione si può dire che i risultati sperimentali stabiliscono come limite inferiore per la formazione del nucleo composto, circa l'80%. Questo è difficile da interpretarsi sulla base del modello a particelle indipendenti dove è ancora possibile la formazione del nucleo composto (quando il nucleone eccitato invece di uscire subito urta altri nucleoni) ma non con così elevata probabilità; calcoli teorici fatti da GOLDBERGER [G 48] e da LANE e WANDEL [L 55] sul cammino libero medio in materia nucleare per le energie che interessano, danno una probabilità di formazione del nucleo composto di circa il 30%; questo indica che è piuttosto difficile spiegare gli attuali risultati in questa maniera. Cioè non sembra che si possano spiegare i risultati sperimentali sulla base del modello a particelle indipendenti; occorre tener conto degli effetti collettivi: ad esempio in termini di « configurazione mista » [E 55]; in tal caso l'accordo con l'esperienza appare buono.

Infine MILONE e RICAMO [Mi 57] studiano i fotoprotoni con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 30$  MeV con emulsioni nucleari. Poichè la maggior parte dei protoni di energia  $> 8$  MeV sfugge dalle lastre, si considerano

solo i protoni di energia  $< 8$  MeV e per riferirsi ai protoni che provengono principalmente dalla risonanza gigante si trascurano anche quelli di  $E_p < 4$  MeV. L'andamento della distribuzione angolare dei fotoprotoni di energia compresa tra 4 e 8 MeV ha la forma caratteristica  $a + b \sin^2 \theta$  con un evidente massimo a  $90^\circ$ .

In una successiva esperienza MILONE e coll. [Mi 58] eseguono irraggiamenti contro bersagli gassosi di ossigeno a tre diverse energie massime: 23, 26 e 30 MeV, studiando lo spettro dei fotoni. Ottengono una buona evidenza di struttura fine nell'analisi degli spettri a 23 e 26 MeV, con risonanze in assorbimento per energie dei  $\gamma$  di 18.8, 19.3, 20.6 e 22.2 MeV, mentre gli spettri a 30 MeV danno altre risonanze a 24 (e a 25.5) MeV.

$$^{12}\text{C}, ^{14}\text{N}, ^{16}\text{O}$$

In conclusione i risultati sperimentali relativi al carbonio, all'azoto e all'ossigeno mostrano che questi tre nuclei leggeri, pur avendo diverse soglie per le emissioni di fotoprotoni, si comportano in maniera analoga; i fotoprotoni hanno una distribuzione energetica con un massimo che va attribuito alla risonanza di dipolo elettrico a 22 MeV (mentre i nuclei residui vengono lasciati nei loro stati fondamentali). Nel caso del  $^{12}\text{C}$  vi sono alcuni massimi ben definiti corrispondenti a energie dei fotoni di 21.8, 22.6, 23.3 e 25.8 MeV. Questi sono in accordo anche con le discontinuità che si notano nelle curve di attivazione relative agli esperimenti fatti col betatrone per la reazione  $(\gamma, n)$ .

Anche le distribuzioni angolari presentano andamenti simili nei tre casi e si ha che i fotoprotoni provocati dai fotoni vicini alla risonanza gigante sono anisotropi ma circa simmetrici attorno ai  $90^\circ$  e in accordo con una funzione del tipo  $a + b \sin^2 \theta$  dove il rapporto  $a/b$  ha un valore tra 0.1 e 0.3. A più alte energie i protoni mostrano una asimmetria in avanti che indica la presenza di interferenze dipolo-quadrupolo.

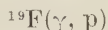
Nell'azoto va notato che i protoni di più bassa energia hanno una distribuzione isotropa che può spiegarsi tenendo presente che questi protoni possono essere prodotti da diverse reazioni e possono lasciare il nucleo residuo in diversi stati eccitati (questo dipende dalla soglia particolarmente bassa per la reazione  $(\gamma, p)$  nel  $^{14}\text{N}$  a differenza degli altri due nuclei  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$ , rendendo perciò accessibile un più gran numero di stati eccitati del  $^{13}\text{C}$ ).

$$^{19}\text{F}(\gamma, n)$$

TAYLOR e coll. [Ta 54] studiano la struttura fine, usando raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung fino a 17 MeV e analizzando la curva di attivazione attraverso la misura della radioattività  $\beta^+$  del  $^{18}\text{F}$  ( $\sim 1.87$  ore); la curva di attivazione viene

esaminata col metodo delle fotodifferenze; ottengono una buona sensibilità verso la soglia del processo ove riescono a risolvere due picchi a 10.6 MeV e 11.2 MeV. Trovano anche un livello a 12.2 MeV che non è stato invece trovato in una esperienza successiva fatta da GOLDBERG e KATZ [Gl 54]; questi ultimi usano la rivelazione diretta dei neutroni e ottengono i livelli 11.0, 11.5, 11.9 e 15.3.

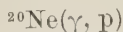
I livelli del fluoro sono stati esaminati anche per mezzo della reazione  $^{18}\text{O}(p, n)^{18}\text{F}$  e qui si trovano livelli in numero molto maggiore; tuttavia tra le due serie di misure l'accordo è abbastanza buono. Poiché la parità dello stato fondamentale del  $^{19}\text{F}$  è pari e lo spin  $\frac{1}{2}$ , l'assorbimento di fotoni di dipolo condurrà a stati di spin  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$  e parità dispari. Per quello che riguarda invece l'assorbimento di protoni, essendo lo stato fondamentale del  $^{18}\text{O}$  uno stato  $0^+$ , i protoni  $s$ , conducono a un livello  $\frac{1}{2}^+$  e i protoni  $p$  ai livelli  $\frac{1}{2}^-$  e  $\frac{3}{2}^-$ ; la cattura di protoni di momento angolare orbitale più elevato condurrà a livelli di più alto spin. Perciò le due serie di misure risultanti dalle  $^{18}\text{O}(p, n)^{18}\text{F}$  e  $^{19}\text{F}(\gamma, n)^{18}\text{F}$  si sovrapporranno per quei livelli che hanno spin  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{2}$  e parità dispari. Chiaramente questi livelli non possono essere raggiunti da protoni  $s$ , o comunque da protoni di momento angolare orbitale pari.



WHETSTONE e coll. [W 56] esaminano la distribuzione energetica dei fotoprotoni irradiando con  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 22$  MeV. I protoni vengono rivelati a  $90^\circ$  con uno spettrometro consistente di un cristallo di NaI, un fotomoltiplicatore e un analizzatore ad altezza di impulso a 100 canali. Lo spettrometro ha una risoluzione del 3.5% in energia per particelle  $\alpha$  del polonio da 5.3 MeV. (Il fondo è 0 per energie del protone  $> 6$  MeV ma gli impulsi dovuti a elettroni veloci del NaI danno un fondo che aumenta rapidamente al diminuire dell'energia).

Trovano una chiara struttura fine per protoni sia di media che di alta energia. La risoluzione dei dettagli strutturali è limitata dallo spessore della targhetta.

JOHANSSON [J 58] nello studio delle fotoreazioni sui nuclei leggeri, esamina anche la distribuzione energetica dei fotoprotoni dal fluoro mettendo in evidenza vari massimi ben risolti corrispondenti a livelli alcuni dei quali coincidono con quelli trovati per mezzo di altre reazioni.



ATKINSON e coll. [A 56] rivelano i fotoprotoni in camera di Wilson. Usano raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con un sincrotrone con  $E_{\text{max}}$  di 23 MeV. Il processo  $(\gamma, p)$  è stato studiato misurando la « range distribution » del  $^{19}\text{F}$  di rinculo ed è stato così possibile risalire alla risonanza gigante per questa reazione.

Questa risonanza è in accordo con quella del processo  $(\gamma, n)$  solo se si fa l'ipotesi che una certa proporzione di  $(\gamma, p)$  lascia il  $^{19}\text{F}$  in stati eccitati. Questa proporzione si trova essere in buon accordo con i valori dei lavori pubblicati sul processo  $^{19}\text{F}(p, p'\gamma)^{19}\text{F}$ .

Anche A. P. KOMAR e I. P. YAVAR [K 57] esaminano in camera di Wilson i fotoprotoni irradiando il neon con raggi  $\gamma$  di  $E_{\text{u.r.}} = 80$  MeV. La distribuzione angolare dei fotoprotoni di energia tra 1 e 15 MeV è della forma  $a + b \sin^2 \theta$  con  $b/a \sim 2.5$ .

### $^{23}\text{Na}(\gamma, p)$

OPHEL e WRIGHT [O 58] usano il sodio sia come sorgente che come rivelatore dei fotoprotoni; questi vengono prodotti nel sodio dalla radiazione monocromatica  $^7\text{Li}(p, \gamma)$ . Con questa tecnica si ottiene uno spettro energetico di fotoprotoni con un'ottima risoluzione e una alta precisione statistica.

I gruppi di protoni osservati corrispondono a transizioni agli stati del  $^{22}\text{Ne}$ , fondamentale, 1.3, 3.3, 4.4, 5.4 e 5.7 MeV. Di questi livelli solo due (quello a 1.3 e 3.3) sono d'accordo con i livelli di 1.28 e 3.35 ben stabiliti in precedenti lavori (v. [A 49] e [Fo 54]). Sembra inoltre che si possa identificare, con 4.4 MeV un livello trovato precedentemente da FOSTER [Fo 54] a 4.9 MeV. Invece i livelli 5.4 e 5.7 MeV cadono in una regione che non è mai stata investigata prima di ora.

### $^{24}\text{Mg}$ , $^{25}\text{Mg}$ , $^{26}\text{Mg}(\gamma, n)$

NATHANS e YERGIN [N 55] studiano i fotoneutroni da Mg arricchendo una volta l'isotopo  $^{24}\text{Mg}$  e un'altra il  $^{25}\text{Mg}$ . Le abbondanze usate sono una volta 99.59, 0.30 e 0.11 % e un'altra volta 5.87, 92.33 e 1.80 %, rispettivamente per l'isotopo 24, 25 e 26. Malgrado la forte differenza della soglia del processo per i due isotopi ( $\sim 9.3$  MeV) i massimi delle risonanze sono molto vicini e precisamente 19.5 MeV e 20.3 MeV per l'isotopo  $^{24}\text{Mg}$  e  $^{25}\text{Mg}$  rispettivamente e questo mostra che le energie  $E_m$  a cui si ha il massimo della sezione d'urto dipendono essenzialmente dal numero di massa  $A$  e non dalla soglia del processo. Un risultato analogo è ottenuto dagli stessi autori per lo  $^{90,91}\text{Zr}$  (v.).

In una successiva esperienza YERGIN [Y 56] esamina in dettaglio la sezione d'urto del processo  $(\gamma, n)$  per  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{25}\text{Mg}$  e  $^{26}\text{Mg}$  sfruttando il fatto che le soglie per questo processo nei tre diversi isotopi sono rispettivamente 16.17, 7.53 e 11.12 MeV (questi dati sono presi dalle tabelle di WAPSTRA [Wa 55]). È così possibile misurare la  $\sigma(\gamma, n)$  per il solo  $^{25}\text{Mg}$  in magnesio naturale dalla sua soglia fino a quella del  $^{26}\text{Mg}$ ; da 11 a 16.5 MeV si può misurare la  $\sigma(\gamma, n)$  composta di  $^{25}\text{Mg}$ ,  $^{26}\text{Mg}$  senza il contributo di  $^{24}\text{Mg}$ .



Si può inoltre anche misurare la sezione d'urto della reazione  $^{24}\text{Mg}(\gamma, n)^{23}\text{Mg}$  osservando l'attività del  $^{23}\text{Mg}$ . Con questo metodo, il gruppo di Saskatchewan [K 51] e [Ka 54] ha misurato la sezione d'urto per Mg naturale e anche per  $^{24}\text{Mg}$  ottenendo per la  $(\gamma, n)$  di  $^{25}\text{Mg}$  un massimo elevato a 13 MeV (Fig. 32, 33); in questa esperienza viene assunto che quasi tutta la sezione d'urto al di sopra della soglia dell' $^{24}\text{Mg}$  sia dovuta al solo  $^{24}\text{Mg}$  che nella miscelazione naturale è il 78.60% contro il 10.11% di  $^{25}\text{Mg}$  e 11.29% di  $^{26}\text{Mg}$ . Invece la  $\sigma(\gamma, p)$ , sempre per  $^{25}\text{Mg}$  mostra un grande massimo a 21 MeV (questo è in accordo con i dati di TOMS e STEPHENS [To 51]). Se questo è giusto, ciò implicherebbe una molto diversa struttura dei livelli del  $^{25}\text{Mg}$  per eccitazione di protoni da quello per eccitazioni di neutroni il che in pratica significa che non vi è formazione di nucleo composto

con distribuzione statistica dell'energia fra i nucleoni. NATHANS e YERGIN [N 55] hanno già riportato la  $\sigma(\gamma, n)$  per  $^{24}\text{Mg}$  e  $^{25}\text{Mg}$  arricchiti isotopicamente; la sezione d'urto del  $^{24}\text{Mg}(\gamma, n)^{23}\text{Mg}$  calcolata col metodo usuale della attività residua è in accordo con quella stimata per Mg naturale; non lo è invece la sezione d'urto per  $^{25}\text{Mg}$ .

Come si è già detto (v. [N 55]) nella regione tra 7.3 e 11.1 MeV, la  $\sigma(\gamma, n)$  è dovuta solo a  $^{25}\text{Mg}$  mentre tra 11.1 e 16.6 MeV a  $^{25}\text{Mg}$  e  $^{26}\text{Mg}$  insieme. Ora queste misure di  $^{25}\text{Mg}$  sono in disaccordo non solo nella

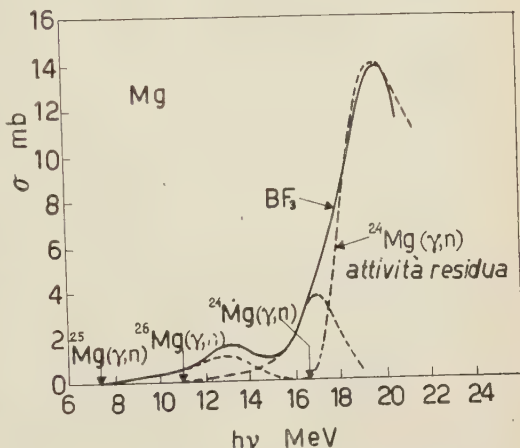


Fig. 32. — Sezione d'urto  $(\gamma, n)$  per Mg naturale (linea continua). La curva tratteggiata per  $^{24}\text{Mg}$  è ottenuta dalla curva d'attivazione  $(\gamma, n)$  (e corretta all'abbondanza isotopica di  $^{24}\text{Mg}$  in Mg naturale). La differenza tra queste due curve rappresenta la sezione d'urto del 10.1% per  $^{25}\text{Mg}$  e dell'11.1% per  $^{26}\text{Mg}$  [Ka 54].

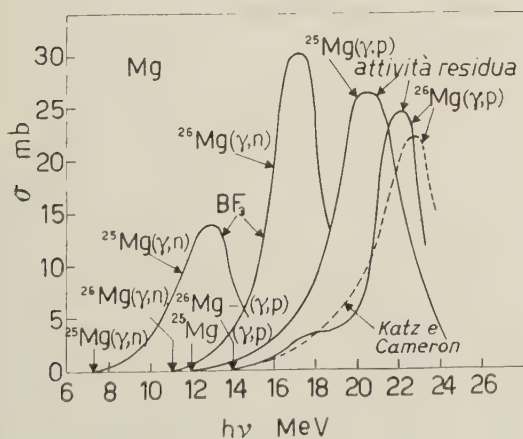


Fig. 33. - Sezione d'urto per  $^{25}\text{Mg}$  e  $^{26}\text{Mg}$  (la curva tratteggiata è la sezione d'urto data da Katz e Cameron [K 51]) [Ka 54].



prima regione ma anche nella seconda, (dove si otterrebbe l'accordo solo assumendo una  $\sigma$  negativa per  $^{26}\text{Mg}$ !).

Si è allora fatta una ulteriore misura in Mg naturale e il risultato è fortemente in disaccordo con i dati pubblicati di Fig. 33. Vi è accordo fino a 11 MeV (con quella misurata precedentemente per  $^{25}\text{Mg}$ ) dove comincia la  $^{26}\text{Mg}$ . Per esaminare meglio si sottrae la  $\sigma$  di  $^{25}\text{Mg}$  da Mg naturale (solo fino a 16 MeV) ottenendo una  $\sigma$  per  $^{26}\text{Mg}$  che può essere attendibile. Dalla Fig. 34 si vede che vi è buon accordo dalla soglia fino a 11 MeV con i dati precedenti di  $^{25}\text{Mg}$ .

Per concludere si ha lo strano risultato che le misure precedenti di Mg naturale e  $^{25}\text{Mg}$  sono in disaccordo nella regione in cui gli altri isotopi di Mg non contribuiscono alla sezione d'urto di Mg naturale e implicano una sezione d'urto negativa per  $^{26}\text{Mg}$ .

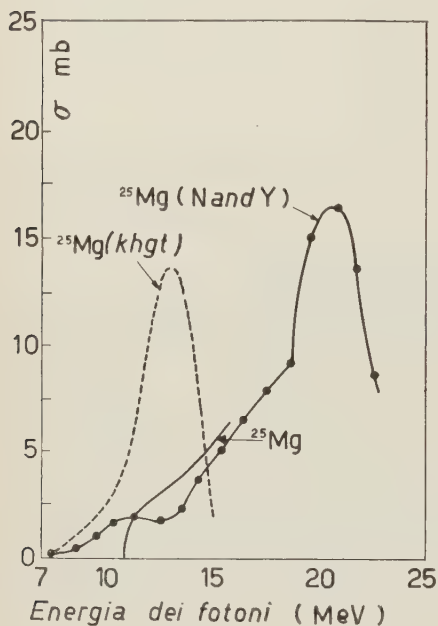
La misura che YERGIN [Y 56] fa per Mg naturale è in forte disaccordo con i dati pubblicati, ma è in accordo con la  $^{25}\text{Mg}$  e implica una sezione d'urto ragionevole per  $^{26}\text{Mg}$ . Non è nota l'origine del disaccordo della sezione d'urto di Mg naturale. (La discrepanza potrebbe essere causata dalla presenza di piccole impurità di elementi pesanti oppure dalla scarsa conoscenza della dipendenza dall'energia dei rivelatori di neutroni).

Fig. 34. — Sezione d'urto per  $^{25}\text{Mg}$  e  $^{26}\text{Mg}$ . La curva continua è per l'isotopo separato  $^{25}\text{Mg}$  [N 55], la curva tratteggiata è ancora per  $^{25}\text{Mg}$  ma dedotta da Mg naturale [Ka 54], mentre la piccola curva è una stima approssimata della  $\sigma$  per  $^{26}\text{Mg}$  [Y 56].

Una successiva esperienza è fatta da SPICER [S 58]; viene misurata la intensità dei fotoneutroni da Magnesio naturale per intervalli di 0.4 MeV da 8 a 17 MeV. La sezione d'urto che ne risulta, ha un massimo a 13.5 MeV; questo è in accordo con i lavori di KATZ e coll., ma non con quelli di NATHANS e YERGIN [N 55]. Il massimo trovato da [S 58] non può assegnarsi definitivamente a  $^{25}\text{Mg}$  od a  $^{26}\text{Mg}$ .

### Mg( $\gamma$ , p)

TOMS e coll. [T 50] osservano i fotoprotoni in emulsioni fotografiche usando  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\text{max}} = 25.5$  MeV. Come distribuzione an-



colare trovano:

Angolo	30°	60°	90°	120°	150°
No. protoni	79	80	93	65	106

mentre come distribuzione energetica trovano:

Energia (MeV)	2÷3	3÷4	4÷5	5÷6	6÷7	7÷8	8÷9	9÷10
No. protoni	34	73	80	66	87	62	18	3

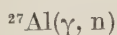
Inoltre da misure di radioattività indotta trovano che meno del 5% dei protoni sono prodotti da  $^{24}\text{Mg}(n, p)$ ,  $\frac{3}{4}$  da  $^{25}\text{Mg}(\gamma, p)$  e  $\frac{1}{4}$  da  $^{26}\text{Mg}(\gamma, p)$ .

In una successiva esperienza TOMS e STEPHENS [To 51] misurano la distribuzione energetica ed angolare dei fotoprotoni da Mg con  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\max} = 24$  MeV in emulsione nucleare. Sia Mg naturale che  $^{25}\text{Mg}$  arricchito mostrano una distribuzione angolare uniforme per tutte le energie protoniche.

Quanto alla distribuzione energetica, quella di  $^{25}\text{Mg}$  arricchito è confrontabile con una distribuzione calcolata secondo la teoria evaporativa; sono state usate varie densità di livelli energetici e un buon accordo è stato ottenuto usando le densità note dei livelli del  $^{24}\text{Na}$ .

Tuttavia il numero dei protoni è molto maggiore di quello previsto dalla teoria statistica; se però si tiene conto delle regole di selezione dello spin isotopico, si raggiunge un buon accordo.

JOHANSSON [J 55] trova infatti che il rapporto  $(\gamma, p)/(\gamma, n)$  è in buon accordo con i calcoli di MORINAGA [Mo 55] secondo cui l'emissione di protoni è il modo predominante di decadimento per i nuclei con  $A = 4n$  a causa delle regole di selezione dello spin isotopico. Poichè i calcoli sono basati sul modello a nucleo composto, l'accordo rappresenta una indicazione della validità di questo modello.



DIXON [D 55] dà come distribuzione angolare dei fotoneutroni un andamento secondo  $a + b \sin^2 \theta$  con  $a/b = 0.36 \pm 0.29$ . Usa  $\gamma$  di bremsstrahlung da 70 MeV e rivela i neutroni con scintillatori di lucite e solfuro di zinco. Tale esperienza è fatta anche per altri 6 elementi (Pb, Sn, Cu, Fe, C, Be).

Anche JOHANSSON [J 55] usando  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\max} = 65$  MeV trova una distribuzione angolare della forma  $a + b \sin^2 \theta$  per i fotoneutroni al di sopra di 5 e 10 MeV.

SARGENT e REVZEN [Sa 58] studiano i fotoneutroni da  $\text{Al}(\gamma, n)$  con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung da un sincrotrone da 70 MeV rivelandoli in emulsioni nucleari. Lo spettro energetico dei fotoneutroni mostra dei massimi molto larghi a 1, 6 e 9 MeV. Lo spettro può mettersi bene in accordo con la teoria statistica assumendo una temperatura nucleare costante di  $(1.8 \pm 0.2)$  MeV e solo una piccola frazione di neutroni verso i 6 MeV può attribuirsi ad emissione diretta.

Invece MALVANO [M 58] in uno studio completo del fotoeffetto in  $^{27}\text{Al}$  ottiene come risultato che lo spettro neutronico per raggi  $\gamma$  al di sopra di 22 MeV contiene una frazione molto più grande di neutroni veloci che non quella che ci si dovrebbe attendere sia sulla base del modello evaporativo che di quello di Wilkinson.

### $^{27}\text{Al}(\gamma, p)$

DIVEN e ALMY [D 50] osservano la  $(\gamma, p)$  in emulsioni nucleari con  $\gamma$  di  $E_{\text{max}} = 20.8, 17.1$  e  $11.9$ . Tutti i protoni sono emessi con simmetria sferica e lo spettro energetico e il rapporto  $(\gamma, p)/(\gamma, n)$  sono compatibili con il modello statistico nell'ipotesi di una densità di livelli costante o lentamente crescente nel nucleo residuo.

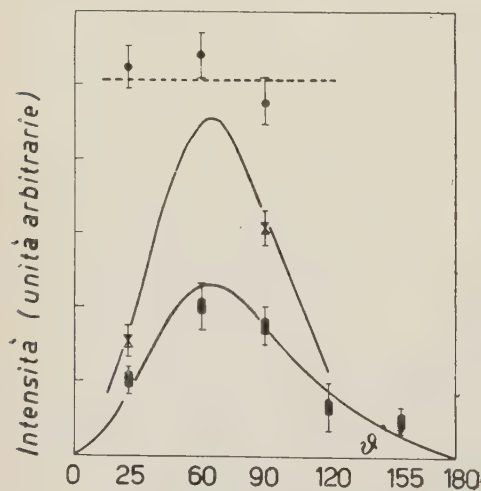


Fig. 35. - Distribuzione angolare dei protoni da Al. ● per  $E_{\text{max}} = 25$  MeV, x per  $E_{\text{max}} = 40$  MeV, ■ per  $E_{\text{max}} = 65$  MeV (le due curve più basse sono del tipo  $(\sin \theta + p \cdot \sin \theta \cos \theta)^2$ ) [Hf 53].

Questi risultati sono simili a quelli ottenuti per il Mg da [T 50]. Invece in altre esperienze fatte a energie più alte dei  $\gamma$ , la distribuzione angolare non presenta più la simmetria sferica. Infatti CAMERON e HOFFMANN [Ca 53] e [Hf 53] irradiano fogli di alluminio con  $E_{\text{max}}$  da 25 a 65 MeV ed esaminano i fotoprotoni prodotti ai vari angoli in emulsione nucleare. Quelli emessi a bassa energia appaiono distribuiti isotropicamente (Fig. 35) ed hanno una distribuzione energetica caratteristica dei processi evaporativi; i protoni a più alta energia hanno distribuzione angolare della forma  $(\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$  con  $p \sim 0.7$ ;

la distribuzione energetica può essere rappresentata da  $E_p^{-n}$  (dove  $E_p$  è l'energia del protone); l'esponente  $n$  subisce un forte aumento per un valore

di  $E_p$  leggermente più grande della metà del massimo dell'energia dei fotoni incidenti: è circa due nella prima parte e quattro nella seconda. I risultati sembrano compatibili qualitativamente con il modello a quasi deutone di Levinger (una analogia esperienza è fatta da [Ca 53] sul tantalio).

Sempre ad alta energia DAWSON [Dw 55], [Da 55] e [D 56] esamina la distribuzione angolare dei fotoprotoni di energia  $> 8$  MeV. I  $\gamma$  usati sono quelli di bremsstrahlung da un sincrotrone da 70 MeV. Trova una marcata asimmetria in avanti. Esattamente tra  $(2 \div 4)$ ,  $(4 \div 6)$  e  $(6 \div 8)$  MeV la distribuzione è circa isotropa mentre per energia  $> 8$  MeV il numero di protoni tra  $20^\circ$  e  $30^\circ$  è doppio di quello tra  $150^\circ$  e  $160^\circ$ . Quanto alla distribuzione energetica, questa è stata paragonata sia con quella calcolata per mezzo della teoria evaporativa con una temperatura nucleare indipendente dall'energia di eccitazione sia con una formula analoga a quella calcolata da Courant per il processo diretto e in cui la sezione d'urto dipende dall'energia come  $E^{-\frac{7}{2}}$ . Si è trovato un buon accordo usando la teoria evaporativa con una temperatura nucleare costante di 2.1 MeV. (Invece ad esempio TOMS e STEPHENS [T 53] per i fotoprotoni da In, Ce e Bi spiegano la distribuzione energetica prendendo una dipendenza della sezione d'urto dall'energia basandosi su quella suggerita dall'effetto diretto di Courant e trovano una dipendenza come  $E^{-3}$  che è vicina alla dipendenza  $E^{-\frac{7}{2}}$  propria dell'effetto fotoelettrico).

Dawson esegue un analogo esperimento anche per il Cu, il Rh e l'Au. Ancora ad alta energia JOHANSSON [J 55] come già per i fotoneutroni, esamina i fotoprotoni al di sopra di 14 MeV (i  $\gamma$  usati sono quelli di bremsstrahlung con  $E_{\max} = 65$  MeV). La distribuzione angolare mostra un massimo a  $60^\circ$  essendo della forma  $a + (\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$  con  $a = 0.58$  e  $p = 1.35$ .

WHETSTONE e coll. [W 56] esaminano la distribuzione energetica dei fotoprotoni da Al irradiando con  $\gamma$  da bremsstrahlung di  $E_{\max} = 22$  e 18 MeV e rivelando direttamente i protoni con uno spettrometro (la tecnica è quella usata per la rivelazione di fotoprotoni dal F( $\gamma$ , p) (v.).

Si sono contate diverse migliaia di protoni a 22 MeV. Gli spettri mostrano dettagli strutturali ben definiti sia per protoni di media che di alta energia. La risoluzione dei dettagli è limitata dallo spessore della targhetta. Tutte le misure sono state fatte a  $90^\circ$ . L'apparato sperimentale usato è anche utilizzabile per misure di distribuzioni angolari ed energetiche prodotte da fotoeffetto « diretto » negli elementi pesanti.

MILONE e coll. [M 57], come già per il C, misurano la distribuzione angolare ed energetica dei fotoprotoni in emulsione nucleare, usando  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\max} = 31$  MeV. Anche qui la distribuzione angolare dei fotoprotoni dipende dall'energia di essi (Fig. 36) e si può porre nella forma  $a + b \sin^2 \theta$  dove il rapporto  $b/a$  cresce al crescere dell'energia. La distribuzione energetica (Fig. 37) mostra un massimo a 5 MeV.

Anche BARBER e coll. [B 58] nello studio della distribuzione energetica



ed angolare dei fotoprotoni da Al con raggi  $\gamma$  ottenuti da un acceleratore lineare di elettroni a 40 MeV ottengono evidenza di struttura fine. La distribuzione angolare cambia da una quasi isotropia a 4 MeV a un notevole massimo in avanti a 13 MeV.

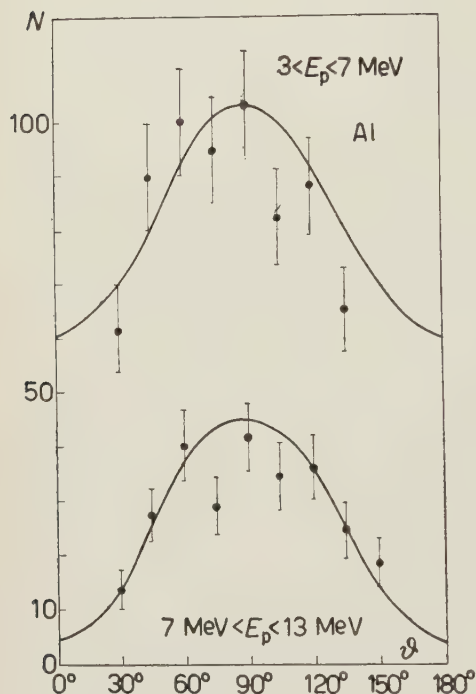


Fig. 36. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni da Al.  $N$  = numero di fotoprotoni osservati con energia  $E_p$  per unità di angolo solido in scala arbitraria [M 57].

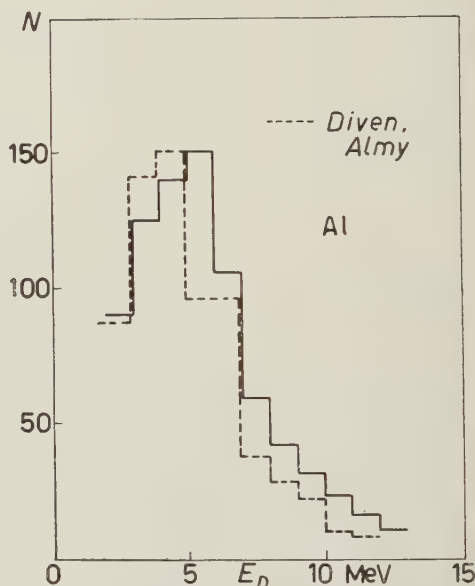


Fig. 37. - Distribuzione energetica dei fotoprotoni da Al.  $N$  = numero di protoni osservati per intervallo di 1 MeV [M 57].

### $^{28}\text{Si}(\gamma, n)$ e $(\gamma, p)$

Per questo nucleo non si hanno distribuzioni angolari ed energetiche dei fotoneutroni. Invece la misura del rapporto  $\sigma(\gamma, p)/\sigma(\gamma, n)$  indica che la teoria statistica non è valida, avendosi un valore sperimentale più grande di quello calcolato. Tuttavia JOHANSSON [J 55] trova che questo rapporto è in accordo con i calcoli di MORINAGA [Mo 55] così come si è visto anche per  $^{24}\text{Mg}$ , e questo indica che il modello a nucleo composto può ritenersi ancora valido purchè si tenga conto delle regole di selezione dello spin isotopico.

Anche KATZ e coll. [Ka 54] fanno misure sulla sezione d'urto  $(\gamma, p)$  e  $(\gamma, n)$  in silicio trovando un rapporto  $\sigma(\gamma, p)/\sigma(\gamma, n)$  di  $\sim 1$  per una energia di 17 MeV contro i  $\sim 0.05$  della teoria statistica.



$^{28}\text{Si}(\gamma, p)$ 

ČUJEC-DOBOVIŠEK [Č 58] misura con emulsioni nucleari lo spettro energetico e la distribuzione angolare dei fotoprotoni irradiando il Si con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\max} = 32$  MeV. Nell'ipotesi che vi sia un solo stato nella configurazione finale (ipotesi verosimile poichè il  $^{28}\text{Si}$  con i suoi 14 protoni e 14 neutroni è debolmente magico due volte con la shell  $1d_{5/2}$  piena: debolmente poichè la  $1d_{5/2}$  è, per così dire, una sotto-shell), la transizione dominante  $1d_{5/2} \rightarrow 1f_{7/2}$  dà protoni di energia ( $E_{\max} = 11.6$  MeV) dando il massimo osservato vicino a 9 MeV se si usa il valore  $E_{\max} = 20$  MeV.

Protoni a più alta energia vengono attribuiti alla transizione  $1d_{5/2} \rightarrow 2p_{3/2}$  e  $1d_{5/2} \rightarrow 1f_{5/2}$ ; i valori di  $\sigma_a$  (sezione d'urto per effetto diretto) calcolati dalla formula di Wilkinson ( $\sigma_a = \sigma(I/2W)$  dove  $\sigma$  è la sezione d'urto d'assorbimento,  $I$  la larghezza per emissione di una particella e  $W$  la parte immaginaria del potenziale ottico complesso), sono in buono accordo con l'esperienza. La distribuzione angolare dei fotoprotoni viene data per tre diversi gruppi di energia e si ha che i protoni di più alta energia mostrano una forte componente  $\sin^2 \theta$  e anche una forte asimmetria in avanti ( $p \sim 1$ ). Il valore di  $b/a$  è abbastanza in accordo con quello voluto dal modello a shell mentre l'asimmetria in avanti indica l'importanza dell'interferenza dipolo-quadrupolo.

Anche EMMA e coll. [E 58] nello studio della distribuzione angolare dei fotoprotoni da Si naturale irradiato con  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\max} = 30$  MeV trovano una marcata asimmetria in avanti con un massimo verso i  $60^\circ$  per il gruppo di protoni di più alta energia, precisamente scritta la distribuzione angolare nella forma  $1 + (b \sin \theta + c \sin \theta \cos \theta)^2$  trovano  $b = 0.8$  e  $c = 0.6$  per i protoni con energia  $> 7$  MeV e  $b = 0.7$ ,  $c = 0.4$  per i protoni con energia  $> 5.5$  MeV, ossia  $p = c/b$  rispettivamente di 0.75 e 0.57. I protoni con energia  $< 3.5$  MeV hanno invece una distribuzione angolare isotropa.

 $^{31}\text{F}(\gamma, n)$ 

SCHUHL [Sc 56] cerca di mettere in evidenza delle discontinuità nell'andamento della curva di attivazione per il processo  $(\gamma, n)$ . Usa un betatrone con  $E_{\max}$  di 22 MeV ( $\pm 20$  keV). Misure preliminari per il  $^{16}\text{O}$  già studiato da altri, vengono fatte per la messa a punto dell'apparecchio; trova accordo con i dati di [K 54] e [P 55]. Per la  $^{31}\text{P}(\gamma, n)^{30}\text{P}$  trova discontinuità nella curva di attivazione indicante una struttura fine della risonanza gigante.

 $^{31}\text{F}(\gamma, p)$ 

ČUJEC-DOBOVIŠEK [Č 58] esamina i fotoprotoni con emulsioni nucleari studiandone la distribuzione angolare e lo spettro energetico. I  $\gamma$  usati sono quelli di bremsstrahlung da 32 MeV. La distribuzione energetica sembra in

accordo col modello statistico; tuttavia la distribuzione angolare mostra una asimmetria in avanti che non può spiegarsi con la teoria statistica e che dimostra che il fotoeffetto diretto non è trascurabile. Secondo LEVINGER [L 58] lo spettro presenta una forma diffusa a causa della indefinizione nell'energia degli stati nella configurazione finale e per questo motivo può rassomigliare a quello dato dalla teoria statistica.

$$^{32}\text{S}(\gamma, p)$$

ČUJEC-DOBOVIŠEK [Č 58] studia anche per questo nucleo, che come il Si è, debolmente, doppiamente magico (in questo caso la sotto-shell piena è la  $2s_{\frac{1}{2}}$ ) la distribuzione angolare e lo spettro energetico. Anche qui si trova un buon accordo col modello a shell di Wilkinson.

$$^{35}\text{Cl}(\gamma, n)$$

Sempre SCHUHL [Sc 56] trova discontinuità nella curva di attivazione mettendo in evidenza una struttura fine della risonanza gigante. Usa un betatrone con  $E_{\text{max}} = 22 \text{ MeV } (\pm 20 \text{ keV})$ .

$$^{40}\text{A}(\gamma, n) \text{ e } (\gamma, p)$$

MCPHERSON e coll. [Ph 54] studiano il rapporto  $\sigma(\gamma, p)/\sigma(\gamma, n)$ . Questo rapporto è molto grande e sorprende anche di più se si pensa che la soglia  $(\gamma, p)$  in argon è 2.5 MeV più alta di quella  $(\gamma, n)$ . Inoltre l'energia a cui si ha il massimo per la sezione d'urto è  $\geq 25 \text{ MeV}$  per la  $\sigma(\gamma, p)$  mentre la  $\sigma(\gamma, n)$  è 20 MeV. Anche questa differenza non è facilmente interpretabile sulla base di una teoria statistica.

$$^{40}\text{A}(\gamma, p)$$

SPICER [Sp 55] studia la distribuzione angolare ed energetica dei fotoprotoni con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 22.5 \text{ MeV}$ . La distribuzione angolare indica che l'assorbimento è principalmente di dipolo elettrico ma si ha anche una componente asimmetrica che implica un termine d'interferenza dipolo-quadrupolo elettrico. La forma è  $a + b \sin^2 \theta (1 + p \cos \theta)$  con i coefficienti dati, alle diverse energie, da (Fig. 38):

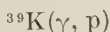
	$a$	$b$	$p$
per tutti i protoni	39	266	1
protoni con $E < 3 \text{ MeV}$	2	160	0.5
protoni con $E > 3 \text{ MeV}$	45	96	2
protoni con $E > 4 \text{ MeV}$	10	52	2

Nel caso dei protoni ad alta energia (Fig. 38) le curve hanno un minimo a  $\sim 130^\circ$ , con un massimo tra  $60^\circ \div 70^\circ$ .

Secondo il modello di Wilkinson (che coinvolge la transizione  $l \rightarrow l+1$ ), la distribuzione angolare impone che i protoni emessi dal nucleo  $^{40}\text{A}$  siano principalmente quelli che hanno momento angolare orbitale zero entro il nucleo. Ora, secondo il modello a shell, l'ultima orbita piena di protoni è la  $2s_{1/2}$ , ma anche la  $1d_{3/2}$  è parzialmente riempita. Secondo Wilkinson, tuttavia, il contributo della  $1d_{3/2}$  è piccolo, poichè transizioni particolarmente intense si hanno se la particella emessa è inizialmente in un'orbita chiusa.

La distribuzione energetica ha invece un massimo a 2.6 MeV e dalle sue caratteristiche si deduce una barriera coulombiana per protoni  $+^{39}\text{Cl}$  di solo 2.5 MeV (il valore classico sarebbe di 5 MeV), mentre la densità dei livelli del Cl aumenta con l'energia circa come  $\exp [E]$ . Questo massimo per la distribuzione energetica dei protoni è eccezionalmente basso; questo strano andamento era stato trovato anche da precedenti esperienze di WILKINSON e CARVER [Wi 51], i quali esaminano la  $\sigma(\gamma, p)$  con raggi  $\gamma$  da 17.6 MeV della  $^7\text{Li}(p, \gamma)^8\text{Be}$ .

Inoltre il massimo è insolitamente stretto. [Wi 51] trovano anche altri due massimi a 5.7 e 6.8 MeV che probabilmente vanno interpretati come transizioni allo stato fondamentale e al primo stato eccitato del  $^{39}\text{Cl}$ . Altro risultato strano è che la  $\sigma(\gamma, p)$  aumenta in una regione dove la  $(\gamma, n)$  diminuisce (v. [Ph 54]) e ciò non è da aspettarsi secondo la teoria evaporativa.



OPHEL [Op 58] fa esperienze con raggi  $\gamma$  monocromatici del  $^7\text{Li}(p, \gamma)$  da 17.6 MeV. Trova transizioni a livelli noti del  $^{38}\text{A}$  a 2.16 e 3.75 MeV ed inoltre riesce a risolvere gruppi di protoni di energia più bassa di 2 MeV, corrispondenti a livelli del  $^{38}\text{A}$  a 4.3, 5.0, 5.4, 6.3, 6.6, 7.3 e 7.85 MeV.

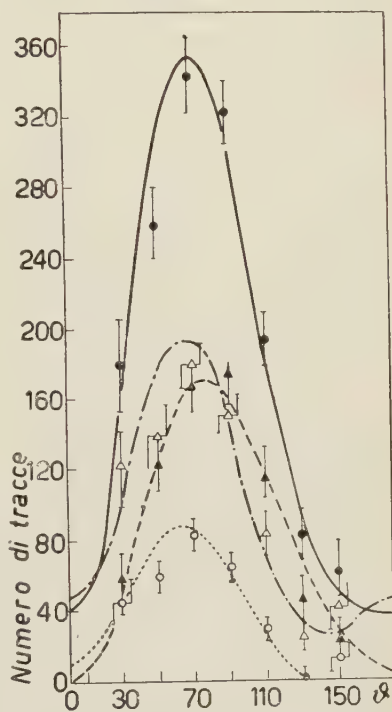


Fig. 38. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni da argon. — tutti i protoni, ---- protoni  $< 3$  MeV, -.-.- protoni  $> 3$  MeV, ..... protoni  $> 4$  MeV [Sp 55].

Ca( $\gamma$ , n)

AGODI e coll. [A 58] misurano con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung lo spettro dei fotoneutroni rivelandoli mediante il rinculo dei protoni in emulsioni nucleari. Trovano un considerevole numero di neutroni tra 6 e 11 MeV.

Cr( $\gamma$ , n)

FERRERO e coll. [F 57] analizzano la sezione d'urto rivelando i neutroni con un rivelatore a soglia (n, p) la cui sensibilità è circa costante da 5 a 14 MeV; le curve di eccitazione sono quindi misurate dalla soglia dei neutroni veloci fino a 30 MeV con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung; analizzando le curve con un metodo di approssimazioni successive, si trova l'esistenza di due massimi separati nella sezione d'urto per l'emissione di neutroni veloci.

L'esperienza è fatta da Ferrero e coll. per altri 24 elementi, ma solo nel Cr, As, I e Ta vengono trovati i due massimi; questo, secondo i detti autori, può essere dovuto al fatto che questi quattro elementi sono isotopicamente puri (eccetto il cromo in cui la percentuale di  $^{52}\text{Cr}$  è l'83.7%) mentre la mancanza di un secondo massimo negli altri elementi misurati può essere dovuto al fatto che non sono isotopicamente puri, potendo la complessità isotopica mascherare la seconda risonanza. Il rapporto sperimentale  $R$  tra l'area del secondo massimo e quella del primo è dato da  $R = 0.7 \pm 0.14$ .

Anche CORTINI e coll. [C 8] studiano in emulsioni nucleari la distribuzione energetica dei fotoneutroni emessi a  $90^\circ$  irradiando il Cr con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 20$  e  $30$  MeV. Le misure sono fatte per confermare o meno l'esistenza di un secondo massimo nella zona della risonanza gigante come si è visto dalle esperienze di FERRERO e coll. [F 57].

Effettivamente l'aumento di un fattore  $\sim 3$  nell'intensità dei neutroni quando si passi da  $E_{\text{max}} = 20$  MeV a  $E_{\text{max}} = 30$  MeV sembra convalidare l'ipotesi dell'esistenza di un secondo massimo. Tuttavia a differenza del caso del Ta (vedi) per cui l'aumento è dovuto a neutroni di energia tra 10 e 19 MeV, qui nel Cr la maggior parte dell'aumento è dovuto a neutroni di bassa energia (tra 5 e 10 MeV). Il tentativo di spiegare il secondo massimo con l'innescarsi del processo di assorbimento a quasi-deutone [Le 51] sembra da escludere, mentre trova credito l'ipotesi [L 58] che i due massimi derivino dalla separazione di due modi di risonanza che si possono avere nei nuclei deformati, a seconda della direzione di polarizzazione del fotone (vedi MIGDAL [M 44], DANOS [Da 56] e [D 58] e OKAMOTO [Ok 56] e [Ok 58]). Già dal 1944 MIGDAL [M 44] calcola l'energia media della polarizzabilità: questa energia media è molto vicino alla energia di risonanza, se la risonanza è abbastanza marcata; ora la polarizzabilità lungo un dato asse è proporzionale per un ellissoide,



al quadrato della lunghezza di questo asse mentre l'energia di risonanza per fotoni polarizzati lungo questo asse è proporzionale all'inverso della radice quadrata della polarizzabilità e quindi inversamente proporzionale alla lunghezza di questo asse. Per nuclei deformati si potrà avere perciò lo sdoppiamento della risonanza.

### Fe( $\gamma$ , n)

DIXON [D 55] dà le distribuzioni angolari ed energetiche usando  $\gamma$  di bremsstrahlung fino a  $E_{\max} = 70$  MeV e rivelando i neutroni con contatori a scintillazione di lucite e solfuro di zinco. La distribuzione angolare è della forma  $a + b \sin^2 \theta$  dove il rapporto  $b/a$  ha il valore  $0.09 \pm 0.25$ . [D 55] fa le stesse esperienze per altri sei elementi (Pb, Cn, Sn, Al, C e Be).

### $^{59}\text{Co}(\gamma, p)$

MANN e coll. [M 52], trovano per i fotoprotoni da cobalto irradiato con  $\gamma$  da bremsstrahlung di  $E_{\max} = 23$  MeV una grande componente asimmetrica descritta da  $(\sin \theta + 0.5 \sin \theta \cos \theta)^2$ . Esperienze d'assorbimento di protoni mostrano che la componente asimmetrica va attribuita a transizioni che coinvolgono livelli discreti nella

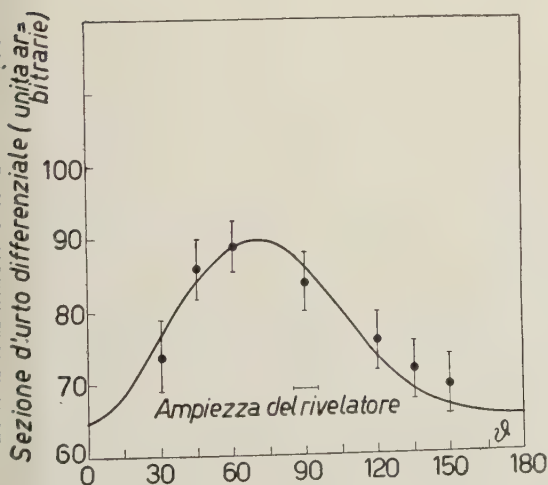


Fig. 39. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni + fotodeutoni da Co. La curva ha la forma  $(\sin \theta + 0.5 \sin \theta \cos \theta)^2$  [M 52].

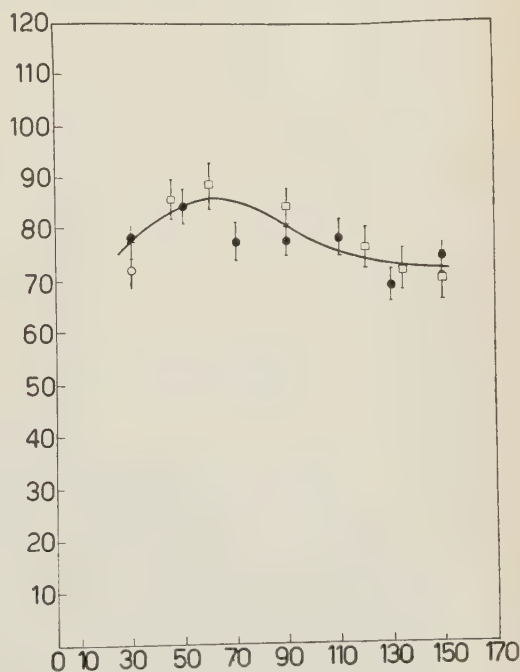


Fig. 40. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni da Co; i quadrati sono di Mann e Halpern [M 52] mentre i punti sono di [To 54].



vicinanza dello stato fondamentale del nucleo residuo. Le distribuzioni angolari osservate sono interpretate come risultanti da interferenze di dipolo e quadrupolo elettrico con una intensità relativa uguale al 5% (Fig. 39).

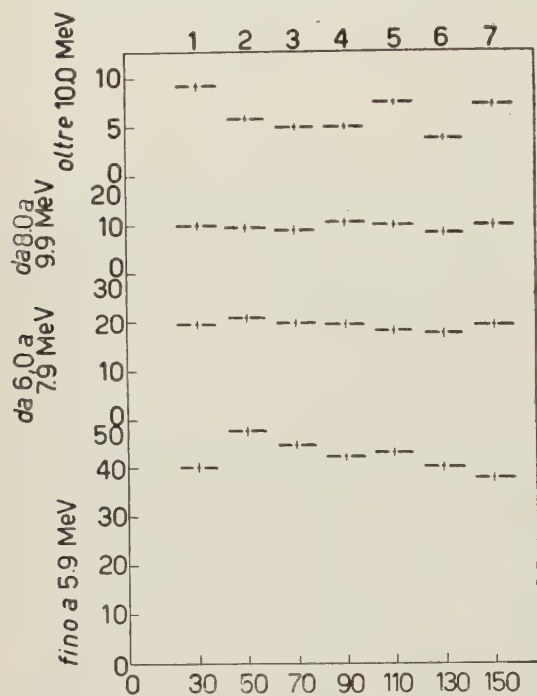


Fig. 41. - Distribuzione angolare di fotoprotoni di diverse energie da Co [To 54].

Ciò che è sorprendente in questa fotoreazione è l'assenza quasi completa di fotodeutoni. Infatti le energie di legame dell'ultimo deutone, o protone, o neutrone, o particella  $\alpha$  nel cobalto sono molto vicine a quelle che si hanno nel rame dove si osservano molti fotodeutoni. Probabilmente la differenza tra cobalto e rame è collegata con la struttura a shell dello stato fondamentale, come è indicato dal modello proposto da Wilkinson. Nel rame infatti l'ultimo protone è  $p_{\frac{3}{2}}$  (v. [K 52]) mentre gli ultimi neutroni occupano la  $p_{\frac{3}{2}}$  e la  $f_{\frac{5}{2}}$  che sono molto vicine fra loro. Nel cobalto invece si ha una shell quasi chiusa di protoni  $f_{\frac{7}{2}}$  mentre quattro neutroni sono nella  $p_{\frac{3}{2}}$ . Questo rende più difficile nel cobalto la unione di un neutrone e un protone con ugual memento angolare e spin per dare un deutone sia in un processo di pick-up sia in emissione diretta.

TOMS e coll. [T 54] e [To 54] usano raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\max} = 24$  MeV e rivelano i fotoprotoni in emulsione nucleare. Notano una asimmetria in avanti copmatibile con la precedente esperienza di MANN e coll. [M 52]. Esattamente la distribuzione angolare ha la forma  $71 + 8 (\sin \theta + \sin \theta \cos \theta)^2$  (Fig. 40) mentre la distribuzione energetica va bene con la teoria evaporativa eccetto per il 5 e 10% che potrebbe derivare da processo diretto. Dalle Fig. 40 e 41 si vede che i protoni anisotropi hanno un'energia compresa tra 3 e 7 MeV. D'altra parte la distribuzione energetica calcolata secondo la teoria del processo diretto, presenta un massimo a  $(5 \div 6)$  MeV; perciò la anisotropia è probabilmente dovuta alla presenza di una piccola percentuale di effetto diretto.

$\text{Ni}(\gamma, p)$ 

MANN e coll. [M 52] studiano la distribuzione angolare dei fotoprotoni irradiando il Ni con  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\max} = 23$  MeV. La distribuzione angolare è data in Fig. 42. A differenza degli altri due elementi (Cu e Co) in cui è messa bene in evidenza una componente asimmetrica, nel nikel non si riesce a metterla in evidenza per via del fatto che l'intensità dei fotoprotoni è tre volte più grande che non nel Cu e Co. Se si volesse mettere in evidenza una componente asimmetrica della stessa grandezza trovata per Co e Cu occorrerebbe una precisione maggiore.

JOHANSSON [J 56], come già per l'ossigeno, anche qui dà lo spettro dei fotoprotoni rivelandoli in emulsioni nucleari ed usando raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung a diverse energie; risolve così passo per passo lo spettro dei protoni sottraendo, via via che aumenta l'energia  $E_{\max}$ , il contributo della risonanza più bassa.

Lo spettro dei protoni mostra dei massimi ben risolti corrispondenti a risonanze in assorbimento.

LEJIKIN e coll. [Le 56] irradiano il Ni con  $E_{\max} = 21.5, 25.5$ , e  $28.0$  MeV. I risultati ottenuti per  $28.0$  MeV non vengono ritenuti buoni (per mancanza di precisione) e quindi non vengono considerati in dettaglio; la rivelazione viene fatta in emulsioni nucleari.

Nelle Figure 43 e 44 vengono mostrate la distribuzione energetica e la distribuzione angolare; quest'ultima è fatta per i protoni sia con energia  $E_p \geq 3$  MeV che con  $E_p \geq 10$  MeV. Si fa il confronto con le curve calcolate secondo la teoria evaporativa per due diverse espressioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  della densità dei livelli. Rispetto alla medesima esperienza fatta sul rame (v. Cu  $(\gamma, p)$ ) si trova che l'eccesso di protoni ad alta energia è un po' superiore. Si può osservare che il confronto dei dati sulla distribuzione energetica dei fotoprotoni dal nikel con quelli del rame [Le 56], e del cobalto [To 54] mostra notevoli somiglianze.

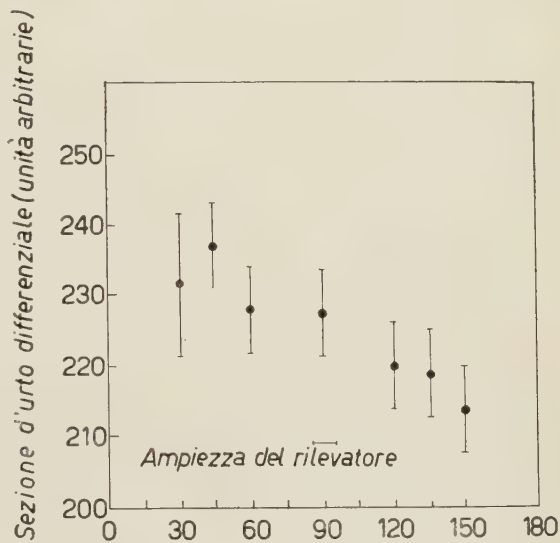


Fig. 42. - Distribuzione angolare di fotoprotoni + fotodeutoni da Ni [M 52].

Quanto alla distribuzione angolare, questa, a differenza di quella del rame, è quasi isotropa. Qui infatti, nell'ipotesi che nel fotoeffetto si manifesti il modello a shell, il livello superiore è il  $4f_{7/2}$  a differenza del rame in cui il livello

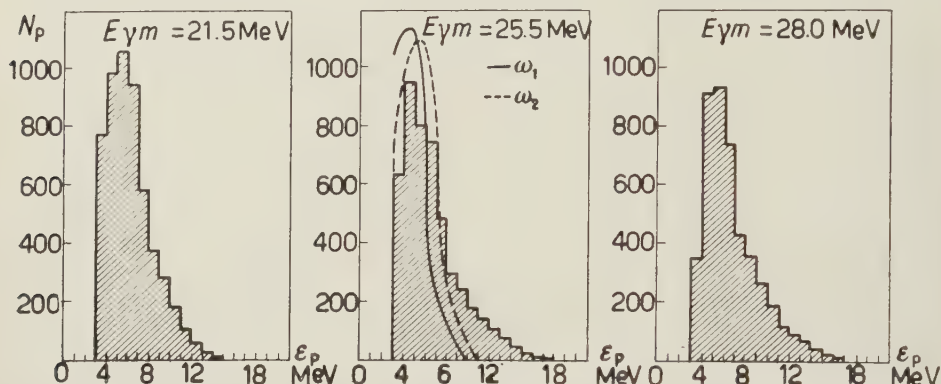


Fig. 43. - Distribuzione energetica dei fotoprotoni  $\geq 3$  MeV da Ni. Le curve sono calcolate sulla base del modello statistico [Le 56].

superiore per i protoni è il  $3p_{3/2}$ . Si può a questo proposito notare che una certa somiglianza la si trova se si confrontano tutti i protoni del nickel per tutti i valori di  $E_{\max}$  solo con quelli più elevati ( $E_{\max} = 28.0$  e  $30.5$  MeV) per il rame [Le 56] (dove interviene allora anche per il rame il livello  $4f_{7/2}$ ). Invece è interes-

sante notare la somiglianza nella distribuzione angolare dei fotoprotoni del nickel con quello del cobalto [To 54], poichè i due nuclei hanno lo stesso livello superiore.

Un altro studio dettagliato dei fotoprotoni emessi dal nickel viene fatto da SPICER e coll. [S 57] anche per fare un confronto con la situazione che si ha nei nuclei adiacenti del Co e Cu. Infatti ad es. mentre la distribuzione angolare ed energetica

dei fotoprotoni di questi nuclei di peso atomico medio ( $Z \sim 30$ ) si può spiegare quasi del tutto con le teorie statistiche (v. ad esempio [B 51] e [To 54]), tuttavia vi sono varie cose che non rientrano in tale teoria. Così è strano il fatto che l'intensità dei protoni (per energie del  $\gamma \sim 23$  MeV) nel caso del rame e del nickel sia tre volte maggiore che non nel caso del cobalto. Qui si studiano però i fotoprotoni da nickel usando una energia dei  $\gamma$  che è al di sotto del massimo della risonanza gigante per la reazione  $(\gamma, p)$  e precisamente con bremsstrahlung da 17.5 MeV.

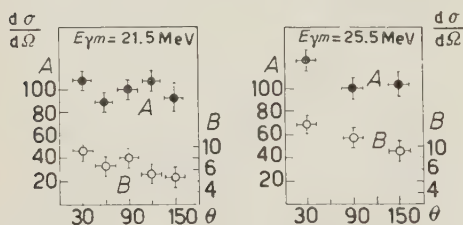


Fig. 44. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni da Ni: A) per protoni  $\geq 3$  MeV; B) per protoni  $\geq 10$  MeV [Le 56].

La distribuzione energetica è mostrata in Fig. 45 e quella angolare in Fig. 46 rispettivamente per tutti i protoni, per il gruppo di  $(2 \div 4)$  e  $(4 \div 8)$  MeV. La distribuzione energetica è in accordo con curve evaporative. La curva *a* di Fig. 45 è calcolata usando un'altezza della barriera coulombiana di 6.9 MeV e una densità dei livelli di 0.9 MeV per il nucleo residuo di cobalto. Questo è in buon accordo con i dati di GRAVES e ROSEN [Gr 53] per lo scattering anelastico di neutroni e di GUGELOT [G 51] per lo spettro di neutroni da reazioni nucleari con protoni di 18 MeV.

L'accordo si ottiene anche usando una barriera coulombiana di altezza 5.6 MeV e una densità di livelli della forma  $\exp[1.04 E]$ . Questo è mostrato nella curva *b* di Fig. 45. Anche in questo caso la densità dei livelli assunta corrisponde alla stessa temperatura nucleare di prima. Se si ac-

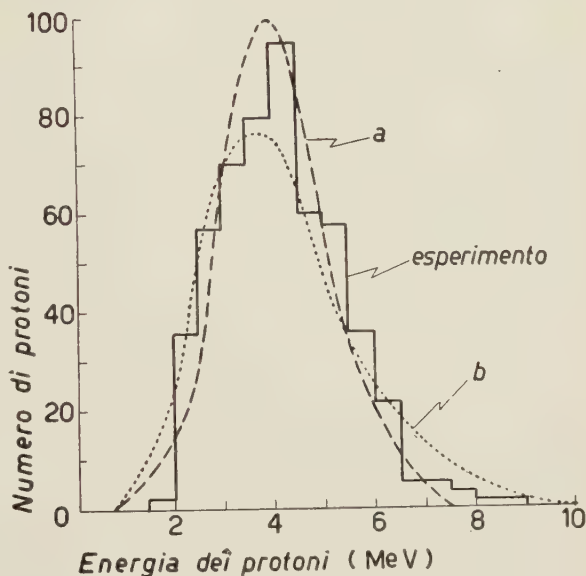


Fig. 45. — Distribuzione energetica dei fotoprotoni da Ni [S 57].

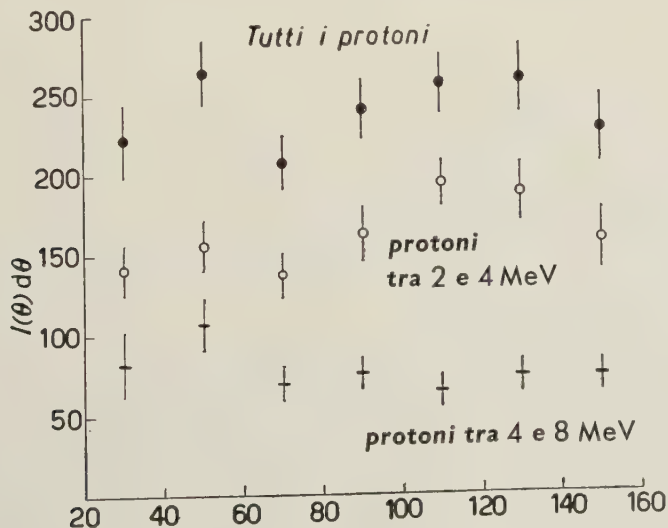


Fig. 46. — Distribuzione angolare dei fotoprotoni da Ni [S 57].



cetta l'ipotesi di LIVESEY [Li 55] secondo cui la temperatura nucleare resta costante fino a eccitazioni a 10 MeV e oltre, allora si deve anche usare una barriera coulombiana che è più piccola dell'altezza classica (che in questo caso è di  $\sim 7$  MeV).

Sebbene la distribuzione angolare possa ritenersi quasi isotropa, sembra tuttavia di vedere massimi a  $50^\circ$  e  $120^\circ$ . Ciò è indicato anche nel lavoro di LEJKN e coll. [Le 56] che abbiamo già visto. Questi massimi si notano anche per i fotoprotoni dal  $^{181}\text{Ta}$  [T 55]. Data questa somiglianza non si capisce bene secondo Spicer, perchè la distribuzione energetica dei fotoprotoni dal nikel possa spiegarsi con la teoria statistica mentre TOMS e STEPHENS [T 55] hanno bisogno di invocare il fotoeffetto diretto per spiegare i fotoprotoni emessi dal tantalio. Va notato che la teoria del fotoeffetto diretto non dà i due massimi a  $50^\circ$  e  $120^\circ$  nella distribuzione angolare.

Bisogna quindi concludere sulla base di questo lavoro e di quello di LEJKN e coll. [Le 56] che sebbene la teoria statistica spieghi bene la distribuzione energetica della maggior parte dei protoni, tuttavia la distribuzione angolare mostra picchi che non si riescono a spiegare nè con la teoria statistica nè con il fotoeffetto diretto.

Quanto ad esperienze a più alta energia, vi è quella di JOHANSSON [J 55] che usa  $\gamma$  con  $E_{\text{max}} = 65$  MeV; i fotoprotoni con energia  $> 14$  MeV hanno una distribuzione angolare con un massimo a  $60^\circ$  della forma  $a + (\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$  dove  $a = 0.94$  e  $p = 1.45$  mentre i fotoneutroni con energia superiore a 5 e 10 MeV vanno secondo la  $a + b \sin^2 \theta$ .

### $\text{Cu}(\gamma, n)$

PHILLIPS [P 53] esamina la sezione d'urto  $\text{Cu}(\gamma, n)$  con un betatrone da 20 MeV variando l'energia massima di intervalli di 0.02 MeV e questo per vedere se c'è o meno una struttura fine. I risultati sperimentali indicano che esistono strette risonanze per cui secondo PHILLIPS sembra che la sezione d'urto debba essere dedotta sulla base dei livelli energetici del nucleo composto. PHILLIPS avverte che questo non elimina la possibilità di un effetto fotoelettrico e si può concludere che la sezione d'urto è dovuta a una serie di strette risonanze sovrapposte a un fondo continuo.

GELLER e coll. [G 57] esaminano con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 22$  MeV la distribuzione angolare dei fotoneutroni da Cu rivelandoli con scintillatori di lucite e solfuro di zinco ottenendo una distribuzione quasi isotropa. Se si mette nella forma  $a + b \sin^2 \theta$ , si trova che  $b/a$  non è più grande di 0.12. Nell'ipotesi che la componente non isotropa sia dovuta a effetto diretto e la restante a processo evaporativo, si ha che la sezione d'urto dovuta al processo diretto è solo l'1 % della totale.



DIXON [D 55] esamina la distribuzione angolare ed energetica con  $\gamma$  da bremsstrahlung di 70 MeV. La distribuzione angolare è studiata con rivelatori a scintillazione di lucite e solfuro di zinco, mentre la distribuzione energetica è determinata in emulsione nucleare. La maggior parte dei neutroni può attribuirsi a processo evaporativo governato da temperatura nucleare costante ( $\sim 1.2$  MeV); la coda alle alte energie è attribuita a processo diretto (Fig. 47).

La distribuzione angolare è circa isotropa indicando una forte predominanza del processo evaporativo. Se si mette la distribuzione angolare nella forma  $a + b \cdot \sin^2 \theta$  si trova  $b/a = 0.23 \pm 0.15$ . In realtà lo studio di DIXON riguarda ben 7 elementi (gli altri sono Pb, Sn, Fe, Al, C, Be) e si trova che la distribuzione angolare tende all'isotropia quando si passi dagli elementi leggeri a quelli pesanti.

Questo è in accordo con i dati di altri autori [P 50] e [Pa 54] mentre è in disaccordo con i dati di [P 54], [Po 50], [J 55]. Questi

ultimi tre hanno per certi elementi pesanti  $b/a = 1$ ; va però osservato che la rivelazione viene fatta con i cosiddetti rivelatori a soglia (per esempio con  $\text{Al}(n, p)$ ); ora questi rivelatori rivelano solo neutroni con energia più alta di una certa soglia e, praticamente, rivelano quindi i neutroni di alta energia; ora i neutroni anisotropi sono proprio quelli che hanno, in media, energie più alte e sono pochi in numero: perciò se il rivelatore è sensibile a tutti i neutroni il rapporto  $b/a$  è circa zero mentre se è sensibile solo a quelli di alta energia, il rapporto  $b/a$  è  $\neq 0$  ed è caratteristico del processo anisotropo.

Per quello che riguarda la variazione di  $b/a$  con il numero di massa  $A$ , occorre prima di tutto tener presente che nei nuclei pesanti i neutroni evaporati tendono ad avere energia più bassa poichè la temperatura nucleare è più bassa. Ora il rivelatore usato da PRICE [P 54] è  $^{27}\text{Al}(n, p)$  e quindi l'andamento osservato cioè l'aumento di  $b/a$  col numero di massa  $A$  è allora probabilmente causato dal rapido diminuire della sensibilità del rivelatore  $^{27}\text{Al}(n, p)$  ai neutroni evaporati piuttosto che a un cambiamento del valore di  $b/a$  per le sole interazioni dirette.

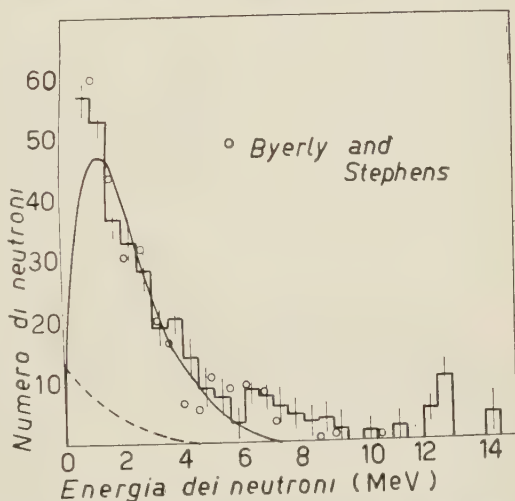


Fig. 47. - Distribuzione energetica dei fotoneutroni dal Cu (istogramma). I cerchietti sono di Byerly e Stephens [B 51]. Le curve continue e tratteggiate sono calcolate per l'evaporazione del primo e del secondo neutrone rispettivamente [D 55].

I presenti risultati mostrano un andamento di  $b/a$  con  $A$  nel senso di una diminuzione di  $b/a$  al crescere di  $A$  (cioè nel senso di una tendenza all'isotropia al crescere di  $A$ ). Poichè d'altra parte la risposta del rivelatore usato da [D 55] (che è di lucite e solfuro di zinco) non è critica sull'energia del neutrone, tali risultati possono intendersi come una indicazione qualitativa della relativa importanza del processo di evaporazione e del processo diretto.

Per quanto riguarda la distribuzione energetica i dati sono in accordo con i risultati precedenti di BYERLY e STEPHENS [B 51] eccetto per le alte energie: la differenza è dovuta al fatto che [B 51] usa una energia massima più bassa ( $E_{\max} = 24$  MeV).

### Cu( $\gamma$ , n) e ( $\gamma$ , p)

BYERLY e STEPHENS [B 51] e [Bi 51] studiano la distribuzione angolare ed energetica dei fotoprotoni e dei fotoneutroni (oltre che deutoni ed  $\alpha$ ) con emulsioni nucleari; usano  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\max} = 24$  MeV.

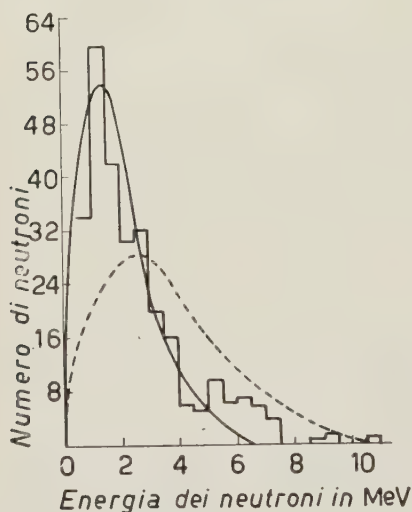


Fig. 48. - Distribuzione energetica dei neutroni. La curva continua è calcolata col modello evaporativo e la tratteggiata con quello di Schiff [B 51].

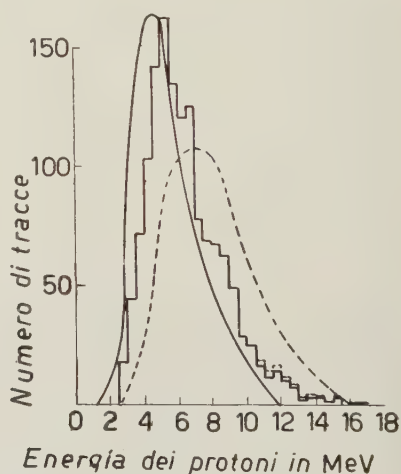
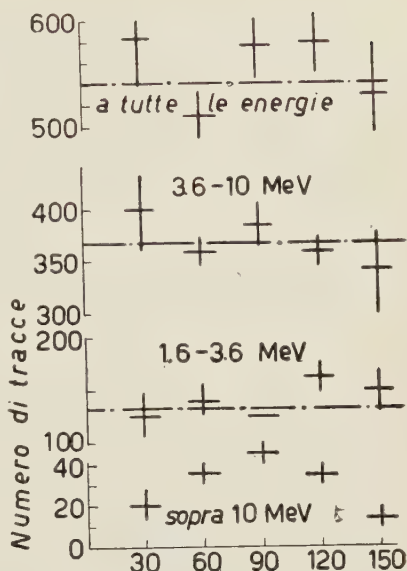


Fig. 49. - Distribuzione energetica dei protoni. La curva continua è calcolata col modello evaporativo e la tratteggiata con quello di Schiff [B 51].

Confrontano le intensità dei ( $\gamma$ , n) e ( $\gamma$ , p) e le distribuzioni energetiche con i modelli statistici e con quelli diretti trovando che nel rame la fotodisintegrazione consiste essenzialmente nell'evaporazione di particelle nucleari dal nucleo eccitato (Fig. 48 e 49). (Il grande numero di deutoni osservati va però

spiegato con un diverso meccanismo, quale il « pick-up » di un protone da parte di un neutrone uscente): circa il 10 % dei neutroni e protoni emergenti hanno energie più grandi di quelle che ci si attende dalla evaporazione; questi vanno attribuiti a fotoeffetto diretto; anche la distribuzione angolare (Fig. 50) per queste piccole percentuali di protoni a più alta energia è anisotropa; inoltre il rapporto  $(\gamma, p)/(\gamma, n)$  è più grande di quello che ci si attende dal modello statistico.

Fig. 50. — Distribuzione angolare dei protoni per vari gruppi energetici [B 51].



$\text{Cu}(\gamma, p)$

MANN e coll. [M 52] misurano la distribuzione angolare dei fotoprotoni usando raggi  $\gamma$  da bremsstrahlung con  $E_{\text{max}} = 25$  MeV. Trovano una forte componente asimmetrica (Fig. 51) descritta dalla  $(\sin \theta + 0.5 \sin \theta \cos \theta)^2$ . Questa

distribuzione viene spiegata con una interferenza tra dipolo e quadrupolo nell'assorbimento del fotone con intensità del quadrupolo del 5%. Va notato che i protoni anisotropi sono quelli di più alta energia.

Anzichè, con  $\gamma$  di bremsstrahlung CHASTEL [C 54] e [C 56] studia la distribuzione energetica dei fotoprotoni rivelandoli con emulsioni nucleari e usando le due righe monocromatiche dei raggi  $\gamma$  del litio. Il rame è allo stato naturale (miscuglio di  $^{63}\text{Cu}$  e  $^{65}\text{Cu}$ ) e i  $\gamma$  usati

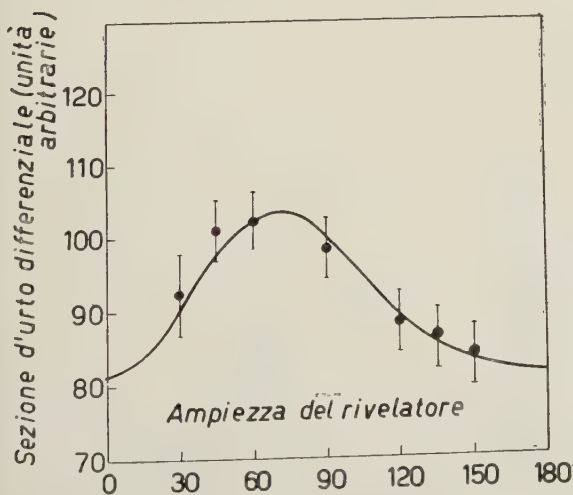


Fig. 51. — Distribuzione angolare dei fotoprotoni + fotodeutoni dal Cu. La curva continua ha l'espressione  $(\sin \theta + 0.5 \sin \theta \cos \theta)^2$  [M 52].

da 14.8 e 17.6 sono di uguale intensità, Il valore che si ottiene per la temperatura nucleare per una eccitazione del nucleo residuo di 10 MeV è di  $(1.0 \pm 0.1)$  MeV; si è paragonato lo spettro con la formula evaporativa dove si è utilizzata per la intensità dei livelli la  $\omega(E) = C \exp [3.35(A - 40)^{1/2} E]^{1/2}$  (essendo  $E$  l'energia di eccitazione del nucleo residuo). La curva sperimentale mostra che l'effetto fotonucleare diretto non sembra importante essendo compreso tra il 3% e il 9%. Questo è in accordo anche con i lavori di LEJ-KIN e coll. [Le 56] (v. in seguito) che esaminano la fotoreazione ad un'energia  $E_{\max} = 19$  MeV (l'effetto diretto comincia a energia più elevata). D'altra parte si è già visto [D 55] che nello studio dello spettro dei fotoneutroni con  $E_{\max} = 70$  MeV si ottiene una temperatura nucleare di  $(1.2 \pm 0.1)$  MeV.

A loro volta GRAVES e ROSEN [Gr 53] ottengono una temperatura di  $(0.77 \pm 0.08)$  MeV studiando la diffusione anelastica di neutroni da 14 MeV. Il rapporto  $\sigma(\gamma, p)/\sigma(\gamma, n)$  è tuttavia molto maggiore di quello voluto dalle teorie evaporative (come risulta ad es. dai lavori di CHASTEL [Ch 50]).

Di nuovo con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung OSOKINA e coll. [O 56] esaminano la distribuzione angolare ed energetica per Cu arricchito con l'isotopo  $^{65}\text{Cu}$ . Esattamente usano una composizione del 93.7% di  $^{65}\text{Cu}$  e 6.7% di  $^{63}\text{Cu}$ .

Rivelano i fotoprotoni in emulsioni nucleari e usano bremsstrahlung con energie massime che variano da 19.8 a 30.7 MeV. Si ha che le caratteristiche dei fotoprotoni da Cu cambiano notevolmente per energie superiori a  $E_{\max} = 24.0$  MeV; questo cambiamento è pronunciato soprattutto per fotoprotoni di energia  $\geq 10.0$  MeV.

In accordo con le predizioni della teoria statistica, il numero dei protoni evaporati dal nucleo composto  $^{65}\text{C}$  deve essere diverse volte minore di quello del  $^{63}\text{Cu}$ . Perciò il contributo del fotoeffetto diretto ai fotoprotoni da  $^{65}\text{Cu}$  deve essere molto più grande che nel Cu naturale.

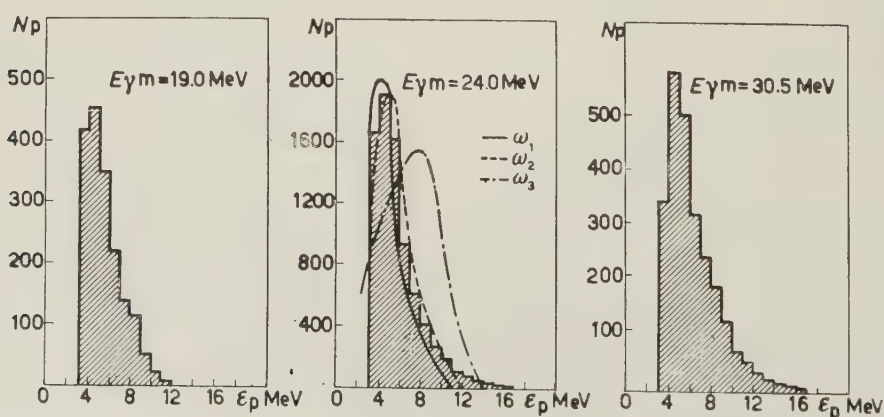


Fig. 52. - Distribuzione energetica totale per protoni  $> 3$  MeV dal Cu. Le curve sono calcolate con il modello statistico [Le 56].



Altra notevole esperienza è quella di LEJNIN e coll. [Le 56] che usano un sincrotrone con  $E_{\max}$  dei  $\gamma$  di bremsstrahlung di 50.5 MeV; i fotoprotoni vengono rivelati in emulsioni nucleari. Il metodo impiegato fornisce buone informazioni circa la distribuzione angolare ed energetica dei protoni anche in presenza di un notevole fondo di elettroni. Il rame viene irradiato con diverse energie massime dei  $\gamma$  e precisamente a  $E_{\max} = 19.0, 24.0, 28$  e 30.5 MeV.

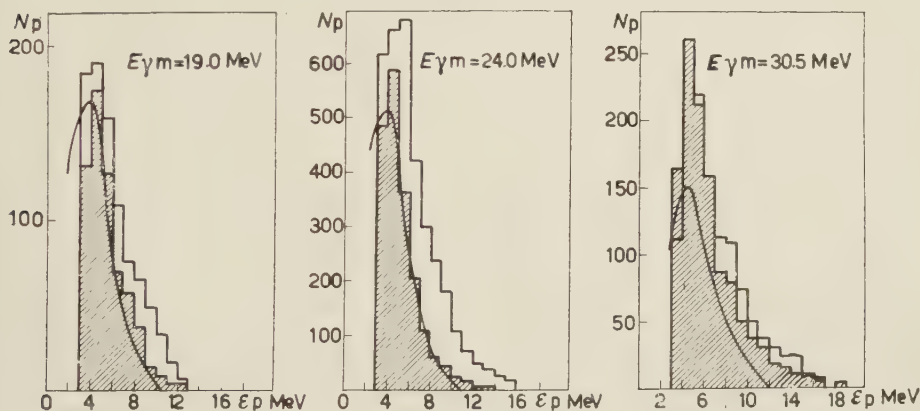


Fig. 53. - Distribuzione energetica dei protoni  $> 3$  MeV dal Cu emessi a diversi angoli. La regione tratteggiata rappresenta i dati complessivi per gli angoli  $28^\circ$  e  $152^\circ$ , mentre i dati per gli angoli  $88^\circ$  e  $92^\circ$  sono contornati dall'altro istogramma; le curve sono calcolate con la teoria statistica [Le 56].

Poichè a 28 MeV non si è riuscito ad avere la necessaria precisione, la discussione dei risultati è limitata alle altre tre energie. In Fig. 52 si riporta la distribuzione energetica dei protoni di energia  $E_p \geq 3$  MeV e la Fig. 53 dà la distribuzione energetica dei fotoprotoni emessi a vari angoli  $\theta$  rispetto al fascio dei  $\gamma$ . Poichè gli spettri dei fotoprotoni emessi ad angoli simmetrici attorno a  $90^\circ$  sono del tutto simili, si sono sommati i dati per gli angoli  $28^\circ$  e  $152^\circ$  per ottenere maggior precisione e così pure per gli angoli  $88^\circ$  e  $92^\circ$ . La distribu-

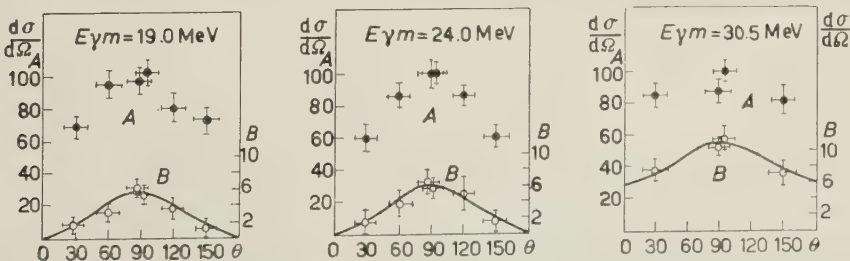


Fig. 54. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni dal Cu: A) per protoni  $< 3$  MeV; B) per protoni  $> 10$  MeV. Le curve corrispondono a una distribuzione  $\sin^2 \theta$  (19.0 e 24.0 MeV) e a  $a + b \sin^2 \theta$  (30.5 MeV) [Le 56].



zione angolare dei fotoprotoni con  $E_p \geq 3$  MeV e con  $E_p \geq 10$  MeV per le tre energie massime dei  $\gamma$  viene data in Fig. 54.

La distribuzione energetica viene calcolata col modello statistico per tre diversi andamenti della densità dei livelli del nucleo residuo e precisamente per

$$\omega_1 = \text{cost} \exp [\sqrt{3.35(A-40)^{\frac{1}{2}} E_R}],$$

usato da Weisskopf,

$$\omega_2 = \text{cost} \exp [\sqrt{1.6(A-40)^{\frac{1}{2}} E_R}],$$

usato da [D 50] e [B 51],

$$\omega_3 = \begin{cases} \text{cost} & \text{per } 0 < E_R < 3 \text{ MeV} \\ \omega_1 & \text{per } E_R \geq 3 \text{ MeV} \end{cases}$$

(per tener conto del fatto che la densità dei livelli a piccole eccitazioni cresce più lentamente di quanto ci si attenda dalla legge esponenziale); dove  $E_R$  è l'energia d'eccitazione  $E_R = E_\gamma - E_{i_0} - E_p$  (essendo  $E_{i_0}$  l'energia di legame del protone). Il calcolo è fatto per  $^{63}\text{Cu}$  e per  $^{65}\text{Cu}$ ; poichè però il contributo dell'isotopo più pesante allo spettro di evaporazione è trascurabile (5% nel caso  $\omega_1$ ) le curve si riferiscono a  $^{63}\text{Cu}$ .

Dalla Fig. 52 si vede che lo spettro dei fotoprotoni mostra un eccesso di particelle veloci rispetto alla distribuzione calcolata con le densità dei livelli  $\omega_1$  e  $\omega_2$  (e ciò è in accordo con [B 51]). La densità dei livelli descritti da  $\omega_3$  dà infine una distribuzione fortemente discordante con lo spettro sperimentale. Così nessuna delle tre espressioni per  $\omega(E_R)$  rende conto soddisfacentemente della osservata distribuzione energetica dei fotoprotoni. D'altra parte gli spettri di Fig. 53 mostrano che mentre la distribuzione energetica per gli angoli  $\theta = 28^\circ$  e  $152^\circ$  è in buon accordo con lo spettro evaporativo (calcolato per  $\omega_1$ ), quello per gli angoli vicino a  $90^\circ$  si allontana grandemente da quello calcolato.

In conclusione i risultati sono in netta contraddizione con la teoria statistica. Anche la distribuzione angolare mostra una elevata anisotropia che non può spiegarsi con la teoria statistica. Come si vede dalla Fig. 54 la distribuzione angolare dei protoni veloci ( $E_p \geq 10$  MeV) per  $E_{\text{max}} = 19.0$  e  $24.0$  MeV è descritta da  $\sin^2 \theta$  mentre per  $E_{\text{max}} = 30.5$  MeV da  $a + b \sin^2 \theta$  con  $b/a \sim 0.8$ . La discrepanza dalla teoria statistica sembra dovuta a interazione diretta tra il raggio  $\gamma$  e i protoni individuali nel nucleo. Sembra che il contributo di questo meccanismo per  $E_{\text{max}} = 24.0$  MeV sia  $\sim 40\%$ . Sembra inoltre che la maggior parte dei fatti sperimentali possa ben spiegarsi nell'ipotesi che nel fotoeffetto si manifesti la struttura a shell. Secondo lo schema di KLINKENBERG [K 52] il nucleo di rame corrisponde alle configurazioni per i protoni  $(1s_{\frac{1}{2}})^2 \dots (4f_{\frac{7}{2}})^2 (3p_{\frac{3}{2}})^1$ .

La stretta analogia della distribuzione energetica e angolare per i protoni veloci a  $E_{\max} = 19.0$  e  $24.0$  MeV va considerata come evidenza che questi protoni sono espulsi dal livello  $3p_{3/2}$  dal raggio  $\gamma$ .

A energie più alte il numero di protoni veloci deve contenere anche i protoni che provengono dal livello più basso  $4f_{7/2}$ . Il fatto che l'anisotropia decresce all'aumentare dell'energia, può considerarsi come evidenza che i protoni che occupano il livello più basso hanno momento angolare più elevato (v. [C 51]) e questo è in accordo con lo schema di [K 52]. Va tuttavia notato che secondo Courant la distribuzione angolare per  $E_{\max} = 19.0$  e  $24.0$  MeV che va come  $\sin^2 \theta$  non corrisponde al fotoeffetto del livello  $3p_{3/2}$  perchè dovrebbe essere presente anche una componente isotropa.

Per quanto riguarda esperienze a energie più elevate DAWSON [Dw 55], [Da 55] e [D 56] esperimenta con  $\gamma$  di bremsstrahlung da un sincrotrone di  $E_{\max} = 70$  MeV. Per spiegare la distribuzione energetica occorre tener conto sia del processo evaporativo che del processo diretto. Quanto ai protoni evaporati, un buon andamento lo si può trovare usando una formula evaporativa con una temperatura costante, di  $1.1$  MeV; i protoni diretti sono circa il 30 %, Quanto alla distribuzione angolare, si ha isotropia a tutte le energie; non si può escludere del tutto una piccola componente anisotropa per il gruppo ad alta energia. (Con lo stesso apparato sperimentale Dawson esamina anche i nuclei di Al, Rh, Au).

### $\text{Zn}(\gamma, p)$

OSOKINA e coll. [O 56] esaminano la distribuzione angolare ed energetica con  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\max}$  che varia da  $19.8$  a  $30.7$  MeV. Lo studio è fatto con le emulsioni nucleari; si trova che queste distribuzioni sono molto sensibili a  $E_{\max}$ . Così la distribuzione angolare dei fotoprotoni di alta energia ( $\geq 9.0$  MeV) che ha la forma  $1 + 2.5 \sin^2 \theta$  per  $E_{\max} < 23.0$  MeV, diventa molto più isotropa a  $E_{\max} \geq 23.3$  MeV. La sezione d'urto di questo processo cresce fortemente a  $E_{\max} \sim 24.0$  MeV e poi decresce per  $E_{\max} = (29 \div 30)$  MeV.

### $^{75}\text{As}(\gamma, n)$

FERRERO e coll. [F 57] come già per il Cr, misurano la sezione d'urto ( $\gamma, n$ ) con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung trovando due massimi nella zona della risonanza gigante con rapporto  $R$  tra l'area del secondo massimo e quello del primo,  $R = 0.6 \pm 0.12$ .

Br( $\gamma$ , n)

KATZ e coll. [Ka 52] analizzano le sezioni d'urto in funzione dell'energia delle reazioni ( $\gamma$ , n) sull' $^{81}\text{Br}$  che lasciano l' $^{80}\text{Br}$  nello stato fondamentale e negli stati eccitati, facendo considerazioni sul rapporto delle due sezioni d'urto sulla base dei modelli statistici; il rapporto dipende dagli spin dei livelli eccitati in cui è lasciato l' $^{80}\text{Br}$ . L'analisi basata su questo punto di vista, conduce a risultati in accordo con il rapporto misurato. Come valori trovano per lo stato fondamentale una  $\sigma_{\max}$  di 88 mb e per lo stato eccitato una  $\sigma_{\max}$  di 42 mb. Ambedue questi massimi si hanno per una energia intorno ai 18 MeV.

Br( $\gamma$ , p)

WÄFFLER [W 53] studia i fotoprotoni nelle emulsioni nucleari bombardandoli con raggi  $\gamma$  del litio e trova valori che rappresentano Ag e Br insieme. Così la distribuzione energetica mostra un massimo marcato vicino all'energia massima  $((10 \div 12.2) \text{ MeV})$  che corrisponde a quei protoni, circa il 12% dei totali, che lasciano il nucleo residuo vicino al suo stato fondamentale. La distribuzione angolare di questo gruppo di protoni ad alta energia può essere descritta dalla espressione  $0.186 + \sin^2 \theta (1 + 0.65 \cos \theta)$ .

 $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{91}\text{Zr}(\gamma$ , n)

In una esperienza analoga a quella fatta per gli isotopi del Mg (v.) NATHANS e YERGIN [N 55] misurano la  $\sigma(\gamma$ , n) con energie dei raggi  $\gamma$  dalla soglia del processo fino a 24 MeV rivelando neutroni prodotti per irradiazione di bremsstrahlung su isotopi separati (le abbondanze usate sono una volta il 98.66, 0.77 e 0.34 per cento e un'altra volta il 12.3, 75.1 e 10.5 per cento rispettivamente per l'isotopo 90, 91 e 92).

Malgrado la grande differenza di soglia del processo ( $\gamma$ , n) per il  $^{90}\text{Zr}$  e il  $^{91}\text{Zr}$  che è di  $\sim 5.0$  MeV, i massimi della risonanza gigante sono molto vicini per i due isotopi e precisamente a 16.0 MeV per  $^{90}\text{Zr}$  e 16.2 MeV per  $^{91}\text{Zr}$  con una  $\sigma_{\max}$  rispettivamente di 185 e 200 mb. Si osserva inoltre una larghezza molto piccola rispetto a quella data dai nuclei circostanti; infatti  $\Gamma$  è rispettivamente 4.1 e 5.4 MeV per i due isotopi e tale piccolezza va probabilmente attribuita al fatto che il  $^{90}\text{Zr}$  ha un numero magico di neutroni ( $N = 50$ ).

Il fatto che i picchi di risonanza per i due isotopi sono molto vicini malgrado la notevole differenza della soglia del processo, lo si ritrova come si è già visto anche per i due isotopi  $^{24}\text{Mg}$  e  $^{25}\text{Mg}$  del magnesio studiati dagli stessi autori [N 55].

$^{100}\text{Mo}$  e  $^{92}\text{Mo}(\gamma, p)$ 

BUTLER e ALMY [B 53] con un betatrone di  $E_{\text{max}} = 22.5$  MeV studiano in emulsione nucleare la distribuzione angolare ed energetica dei fotoprotoni separatamente da  $^{100}\text{Mo}$  e  $^{92}\text{Mo}$ . Il protone del  $^{92}\text{Mo}$  è meno legato del neutrone per una quantità di circa 5.0 MeV mentre per il  $^{100}\text{Mo}$  è più legato del neutrone per 2.4 MeV.

Nel  $^{100}\text{Mo}$  il numero dei  $(\gamma, p)$  supera quello della teoria statistica (a seconda dei parametri scelti nei calcoli, questo eccesso varia da 20 a 125 volte) e il rapporto  $\sigma(\gamma, p)/\sigma(\gamma, n)$  è per il  $^{100}\text{Mo}$  più grande di quello voluto dalla teoria statistica. Perciò la maggior parte dei protoni deve derivare da processo diretto.

La distribuzione energetica osservata è in accordo con quella calcolata osservando la sezione d'urto sperimentale  $\sigma(\gamma, p)$  e assumendo come distribuzione della densità dei livelli energetici del nucleo residuo, una distribuzione esponenziale.

La distribuzione angolare è fortemente anisotropa e per protoni con energia  $> 5$  MeV ha un massimo vicino ai  $45^\circ$  essendo quindi asimmetrica rispetto a  $90^\circ$ .

Per il  $^{92}\text{Mo}$ , invece, il confronto delle distribuzioni angolari ed energetiche dei fotoprotoni con i modelli statistici mostra un buon accordo eccetto per un eccesso di protoni ad alta energia i quali sono inoltre anisotropi. L'intensità dei protoni è dello stesso ordine di grandezza di quella dei neutroni ed è la più grande intensità  $(\gamma, p)$  mai osservata nei nuclei. La competizione della  $(\gamma, n)$  resta indietro poichè il processo  $(\gamma, n)$  presenta una soglia molto elevata dato che il  $^{92}\text{Mo}$  è magico, nei neutroni.

Quanto ad esperienze a più alta energia, vi è quella di JOHANSSON [J 55] che usa  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\text{max}} = 65$  MeV. L'esperienza è analoga a quella fatta sui nuclei di C, Al e Ni. I fotoprotoni con energia  $> 14$  MeV hanno una distribuzione angolare anisotropa della forma  $a + (\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$  con un massimo verso i  $60^\circ$  e con i valori di  $a$  e  $p$  dati rispettivamente da 0.62 e 2.00 mentre i fotoneutroni di energia  $> 5$  e 10 MeV hanno una distribuzione angolare  $a + \sin^2 \theta$ .

Il gruppo di Torino [M 58] nello studio della sezione d'urto  $(\gamma, p)$  nel  $^{100}\text{Mo}$  trova un massimo molto al di sopra della risonanza gigante.

 $^{103}\text{Rh}(\gamma, n)$ 

AGODI e coll. [A 58] come già per il Ca, esaminano con i raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung i fotoneutroni rivelandoli in emulsioni nucleari; a differenza del Ca, trovano qui un numero più piccolo di neutroni di alta energia.



$^{103}\text{Rh}(\gamma, p)$ 

CURTIS e coll. [C 50] studiano la distribuzione angolare dei fotoprotoni del Rh usando raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\text{max}} = 20$  MeV. Il rapporto della intensità dei protoni a piccoli angoli (mediati in avanti e indietro) con quella dei protoni ad angolo retto diminuisce all'aumentare dell'energia dei protoni come segue:

Energia dei protoni (MeV)	3.5 $\div$ 5.5	5.5 $\div$ 7.5	7.5 $\div$ 9.5	9.5 $\div$ 11.5
Rapporto	0.69 $\pm$ 0.13	0.75 $\pm$ 0.10	0.5 $\pm$ 0.10	0.23 $\pm$ 0.08

Si vede cioè che ci si allontana dall'isotropia mano a mano che aumenta l'energia dei protoni essendo i protoni a più alta energia emessi preferenzialmente a  $90^\circ$ .

Ad energie più alte e cioè con  $\gamma$  di bremsstrahlung da un sincrotrone di  $E_{\text{max}} = 70$  MeV, DAWSON [Dw 55], [Da 55] e [D 56] trova che la distribuzione energetica va bene con una formula evaporativa con una temperatura nucleare di 1.0 MeV e trova che i protoni diretti e di evaporazione sono presenti circa in numero eguale.

La distribuzione angolare dei protoni tra 4 e 7 MeV è isotropa mentre per quelli che hanno energia maggiore di 7 MeV vengono considerati due gruppi: quello tra 7 e 10 MeV e quello tra 10 e 16 MeV confrontandoli con la  $a + b \cdot (\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$

Si trova:

per il primo gruppo (7  $\div$  10 MeV)  $b/a = 0.8$   $p = 0.2$

per il secondo gruppo (10  $\div$  16 MeV)  $b/a = 1.5$   $p = 0.3$ .

Va notato che passando verso le alte energie il picco nella distribuzione angolare diventa più pronunciato e si sposta leggermente in avanti, formando un massimo verso gli  $80^\circ$  (con analoga esperienza Dawson dà i risultati anche per l'Al il Cu e l'Au).

 $\text{Ag}(\gamma, n)$ 

GELLER e coll. [G 54] usando  $\gamma$  da bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 22$  MeV studiano la distribuzione angolare dei fotonutroni servendosi dei rivelatori di lucite e solfuro di zinco. Trovano che la distribuzione angolare è quasi isotropa e nell'ipotesi di una distribuzione che vada secondo la  $a + b \sin^2 \theta$  hanno per il rapporto  $b/a$  un valore assai piccolo, minore di 0.12. Se si ritiene il processo diretto responsabile della componente anisotropa, questo influisce sulla sezione d'urto per meno dell'1%.



$\text{Ag}(\gamma, p)$ 

DIVEN ed ALMY [D 50] studiano con raggi  $\gamma$  da bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 20.8$  MeV ed emulsioni nucleari, la distribuzione angolare dei  $(\gamma, p)$  da Ag e il rapporto del numero dei protoni per MeV col numero totale dei neutroni.

Il numero dei neutroni emessi viene misurato dalla attività indotta separatamente per  $^{107}\text{Ag}$  e  $^{109}\text{Ag}$  (è infatti possibile distinguere tra i due Ag (107 e 109) poichè la misura è fatta sull'attività residua una volta indotta dalla  $(\gamma, n)$  su  $^{107}\text{Ag}$  che è di 24.5 minuti e un'altra volta indotta dalla  $(\gamma, n)$  su  $^{109}\text{Ag}$  che è di 2.3 minuti).

Il rapporto dei protoni per intervallo unitario di energia con il numero totale di neutroni viene confrontato con quello che si ottiene sotto varie ipotesi sulla densità dei livelli nucleari; il confronto indica che lo spettro dei protoni osservati consiste essenzialmente di due componenti che si sovrappongono: uno è il gruppo a bassa energia  $< (8 \div 9)$  MeV

che è d'accordo con l'andamento dello spettro ricavato dal modello statistico con una ragionevole densità dei livelli del nucleo residuo: questo gruppo contiene più della metà dei protoni totali. L'altro gruppo a più alta energia ( $\sim (10 \div 14)$  MeV) è completamente al di fuori dello spettro statistico; solo questo secondo gruppo mostra una anisotropia angolare con un massimo a  $90^\circ$  (Fig. 55) il che convalida l'ipotesi che questi protoni siano emessi prima che l'energia sia distribuita statisticamente nel nucleo. Il gruppo a bassa energia ha invece una distribuzione angolare isotropa. Il rapporto  $(\gamma, p)/(\gamma, n)$  è dell'ordine di quello predetto dalla teoria statistica.

Più recentemente WÄFFLER [W 53] studia i fotoprotoni da Ag bombardando direttamente le emulsioni nucleari con raggi  $\gamma$  del litio.

Dato che le emulsioni nucleari contengono anche nuclei di bromo, i risultati sono dati per Ag e Br insieme ( $v. \text{Br}(\gamma, p)$ ).

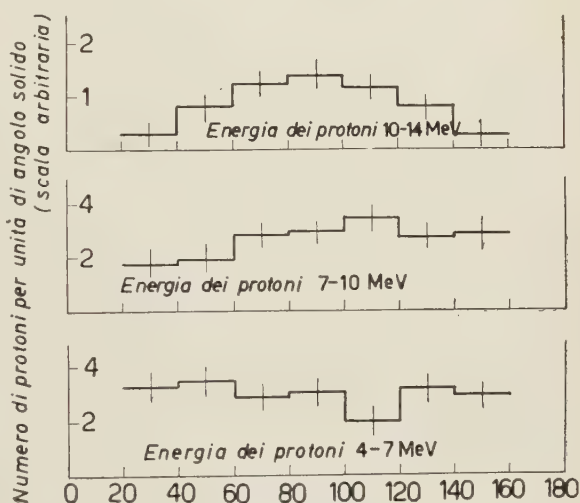


Fig. 55. — Distribuzione angolare dei fotoprotoni da Ag [D 50].

In( $\gamma$ , p)

TOMS e STEPHENS [T 53] esaminano in emulsioni nucleari la distribuzione energetica ed angolare dei fotoprotoni irradiando con  $\gamma$  di bremsstrahlung

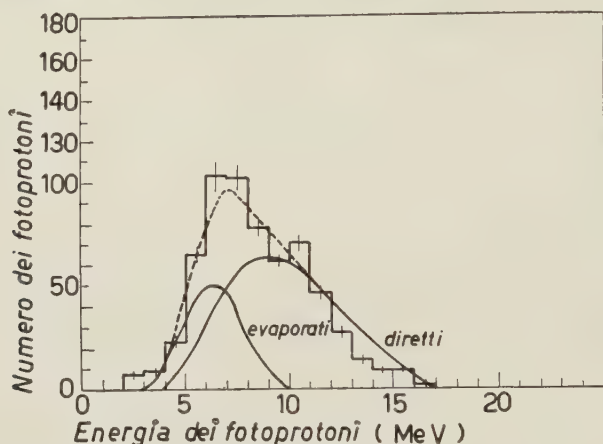


Fig. 56. - Distribuzione energetica dei fotoprotoni da In. Si mostrano le curve calcolate per protoni evaporati e diretti [T 53].

di  $E_{\max} = 24$  MeV. La distribuzione energetica indica una larga frazione di fotoeffetto diretto (Fig. 56). Si osserva anche una marcata asimmetria in avanti. Questa asimmetria (Fig. 57) è probabilmente dovuta a interferenza dipolo-

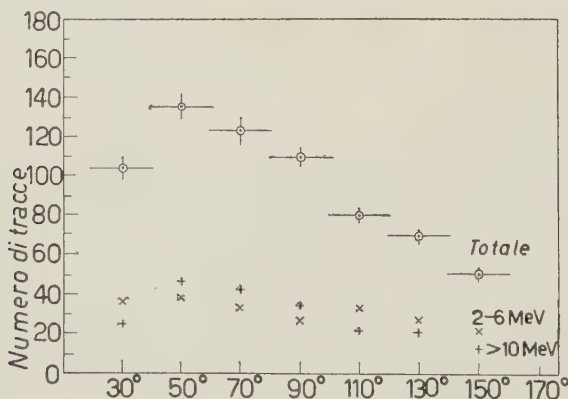


Fig. 57. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni da In [T 53].

quadrupolo che dà una distribuzione angolare del tipo  $a + b(\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$  dove  $p^2/5 = \sigma_{\text{quadr}}/\sigma_{\text{dip}}$ . I valori che danno il miglior accordo sono:  $p$  compreso tra  $\frac{3}{4}$  e 1 e  $b/a$  tra 0.85 e 0.95. Gli stessi autori fanno un'analoga esperienza anche sul Ce e sul Bi (v.); nel Ce non si nota l'asimmetria in avanti.

$\text{Sn}(\gamma, n)$ 

DIXON [D 55] con  $\gamma$  da bremsstrahlung di 70 MeV misura la distribuzione angolare dei fotoneutroni e trova un andamento  $a + b \sin^2 \theta$  con un rapporto  $b/a = 0.12 \pm 0.17$ . L'esperienza è fatta anche per altri 6 elementi (Pb, Cu, C, Al, Fe, Be).

 $^{127}\text{I}(\gamma, n)$ 

Anche per lo I, come già per il Cr e l'As, FERRERO e coll. [F 57] trovano due massimi nella risonanza gigante. Il rapporto  $R$  tra l'area del secondo massimo a quella del primo è in questo caso dato da  $R = 0.4 \pm 0.8$ .

 $\text{Ce}(\gamma, p)$ 

Come già per l'In, anche per il Ce TOMS e STEPHENS [T 53] studiano la distribuzione energetica ed angolare dei fotoprotoni in emulsioni nucleari irra-

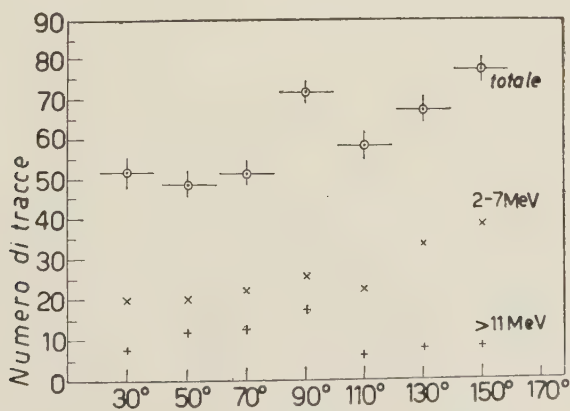


Fig. 58. — Distribuzione angolare dei fotoprotoni da Ce [T 53].

diando con  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 24$  MeV. A differenza dell'In e del Bi, qui non si nota nessuna asimmetria in avanti (Fig. 58) mentre la distribuzione

energetica indica la presenza di un fotoeffetto diretto (Fig. 59) e il rapporto  $\sigma(\gamma, p)/\sigma(\gamma, n)$  è più grande di quello calcolato con la teoria evaporativa.

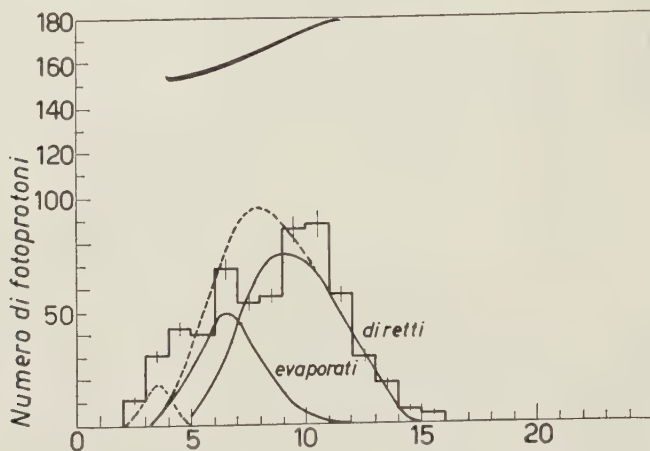


Fig. 59. - Distribuzione energetica dei fotoprotoni da Ce con le curve calcolate per confronto, per protoni evaporati e diretti [T 53].

#### $^{151}\text{Eu}$ ed $^{153}\text{Eu}$

COOK [Co 58] cerca di mettere in evidenza lo sdoppiamento della risonanza gigante derivante dalla deformazione dello stato fondamentale. I risultati indicano che un tale effetto è presente in accordo ad analoghe misure eseguite sul Ta.

#### $^{159}\text{Tb}(\gamma, n)$

FULLER e coll. [F 58] cercano di trovare l'effetto della teoria di DANOS [Da 56], cioè la relazione tra un eventuale sdoppiamento della risonanza gigante e la deformazione dello stato fondamentale ossia, se si vuole, la relazione tra le energie dei due massimi e il quadrupolo intrinseco nucleare. L'effetto viene trovato e sembra confermare la teoria di Danos.

#### $^{181}\text{Ta}(\gamma, n)$

CARVER ed HAY [Cr 53] misurano la sezione d'urto  $^{181}\text{Ta}(\gamma, n)$  a energia sopra la risonanza gigante per vedere se è così grande come indicato da precedenti risultati ottenuti con  $\gamma$  di bremsstrahlung e usano i raggi  $\gamma$  del litio per misurare il rapporto delle sezioni d'urto a 14.7 e 17.6 MeV.

Invece di misurare l'attività indotta del  $^{180}\text{Ta}$  (che è di 8.15 ore) come fatto in precedenti esperienze (v. [Cv 53]), CARVER ed HAY rivelano direttamente i neutroni; il risultato è in accordo con quelli precedenti di bremsstrahlung e confermano l'importanza dell'effetto diretto per energie dei  $\gamma$  al di sopra della risonanza.

In una successiva esperienza CARVER e coll. [C 57] riesaminano la reazione  $(\gamma, n)$  per il  $^{181}\text{Ta}$  per vedere qual'è l'importanza relativa dell'emissione diretta rispetto alla formazione del nucleo composto. Viene scelto il tantalio perchè è praticamente isotopo puro (99.99%), ha una alta barriera coulombiana ( $\sim 13$  MeV) per cui ci si attende che i neutroni siano i principali prodotti di disintegrazione e infine la reazione  $\text{Ta}(\gamma, n)$  può essere osservata semplicemente attraverso la misura dell'attività  $\beta$  residua del  $^{180}\text{Ta}$  che è come si è visto di  $\sim 8$  ore. I raggi  $\gamma$  usati sono quelli di bremsstrahlung provenienti da un betatrone da 31 MeV. Il confronto è fatto tra la reazione  $(\gamma, n)$  e reazioni multiple del tipo  $(\gamma, 2n)$  e  $(\gamma, 3n)$ . I risultati indicano che vi deve essere un notevole contributo dell'effetto diretto.

Abbiamo visto (v. ad es. Cr  $(\gamma, n)$ ) che FERRERO e coll. [F 57] nell'esame della sezione d'urto  $(\gamma, n)$  per 25 elementi, trovano in qualche caso e precisamente nel Cr, nell'As e nello I che la risonanza gigante presenta due massimi distinti. Anche nel caso del Ta [F 57] trovano questi due massimi con un rapporto  $R$  tra l'area del secondo massimo e quella del primo di  $R = 0.5 \pm 0.1$  e poichè in questo caso le misure sono fatte col metodo dell'attività residua, si può essere sicuri che la seconda risonanza non è dovuta all'innescò di un processo competitivo come potrebbe essere la reazione  $(\gamma, 2n)$ . La spiegazione potrebbe invece essere quella secondo cui le due risonanze si hanno in corrispondenza di nuclei deformati (secondo le teorie di DANOS e OKAMOTO [Da 56], [D 58], [Ok 56] e [Ok 58]): a seconda della direzione di polarizzazione del fotone (in relazione ai diversi raggi del nucleo deformato) si avrebbero diverse energie per cui viene raggiunto il massimo della sezione d'urto.

CORTINI e coll. [C 58] esaminano la distribuzione energetica dei fotoneutroni emessi a  $90^\circ$  con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung a due diverse energie massime: 20 e 30 MeV per vedere se esiste o meno un secondo massimo a più alta energia di quella corrispondente alla risonanza gigante come sembra risultare dalla esperienza ora vista di [F 57] e da quella di FULLER e HAYWARD [Fu 57].

Vengono usati, come rivelatori, i protoni di rinculo in emulsioni nucleari; il secondo massimo sembra realmente esistente, in accordo con i risultati di FERRARO e coll. [F 57]. Infatti il confronto dei due spettri ottenuti rispettivamente con  $E_{\text{max}} = 20$  MeV e 30 MeV, mostra che i neutroni di energia  $> 5$  MeV aumentano di un fattore  $1.20 \pm 0.10$  quando si passi da 20 a 30 MeV dando un aumento di  $\sim 30\%$ .

Tutta la differenza tra i due spettri è dovuta a neutroni con energia  $E_n$  tra 10 e 19 MeV cioè in un intervallo energetico in cui non si trovano neutroni



quando si irradia con  $E_{\max} = 20$  MeV (per la conservazione dell'energia con queste  $E_{\max}$  deve essere  $E_n < 12$  MeV); invece per  $E_n < 10$  MeV i due spettri coincidono. Questo secondo massimo potrebbe spiegarsi con un nuovo modo di assorbimento verso i 25 MeV; si potrebbe, ad esempio, fare l'ipotesi che a queste energie si inserisca l'assorbimento secondo il modello a quasi-deutone di LEVINGER [Le 51], ma questo sembra da escludere perchè una stima fatta da WILKINSON [Wi 56] dà per questo meccanismo una soglia molto più bassa, che per il Ta è  $\sim 10$  MeV.

Viene invece anche qui avanzata l'ipotesi che per nuclei deformati secondo le teorie di DANOS [Da 56], [D 58] e OKAMOTO [Ok 56], [Ok 58] la larghezza  $\Gamma$  della risonanza gigante sia più grande essendo dovuta a due risonanze sovrapposte (dipendentemente dalla direzione di polarizzazione del fotone) che possono addirittura scindersi e presentarsi come due massimi.

Anche SPICER [S 58] misura i fotoneutroni per intervalli energetici di 0.2 MeV dalla soglia del processo fino a 18 MeV. La sezione d'urto che se ne ricava mostra un piccolo massimo a 12.8 MeV e uno più alto a 16 MeV. I risultati sembrano in accordo con la teoria di Danos e Okamoto.

FULLER e coll. [F 58] e [Fu 58] ripetono le misure per confermare lo sdoppiamento della risonanza gigante dovuto alla deformazione dello stato fondamentale. Effettivamente l'effetto viene trovato (con due massimi ben risolti a 12.4 e 15.4 MeV di larghezza rispettiva 2.3 e 4.4 MeV) ed è in accordo con le previsioni di Danos e Okamoto. Analoga misura è fatta sul  $^{159}\text{Tb}$  che conferma la relazione tra le due energie dei massimi e il momento di quadrupolo intrinseco nucleare.

Anche CARVER e coll. [Ca 58] studiano la reazione  $^{181}\text{Ta}(\gamma, n)$  col sincrotrone di Canberra per vedere se esiste un doppio massimo nella risonanza gigante. Trovano invece un solo massimo a 13.5 MeV largo 5.3 MeV. Se poi si tiene conto anche della  $(\gamma, 2n)$ , la sezione d'urto somma delle due:  $(\gamma, n) + (\gamma, 2n)$  ha un massimo piuttosto dolce a 14.5 MeV con una larghezza di 6.3 MeV; infine se si tiene conto del numero totale di neutroni e cioè si considera la  $(\gamma, n) + 2(\gamma, 2n)$  si trova un massimo a energia più alta e precisamente a 16 MeV.

$$^{181}\text{Ta}(\gamma, p)$$

HOFFMANN e CAMERON [Hf 53] e [Ca 53] osservano i fotoprotoni in emulsioni nucleari irradiando con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung con  $E_{\max}$  variabile da 25 a 65 MeV. Mentre i protoni a bassa energia hanno una distribuzione angolare isotropa, quelli a più alta energia vanno col  $\sin^2 \theta$ . Come già nel caso del  $^{27}\text{Al}$ , la distribuzione energetica per questi ultimi protoni va come  $E_p^{-n}$  dove però questa volta  $n$  aumenta molto meno all'aumentare dell'energia.

I risultati sperimentali non trovano una soddisfacente spiegazione con nessuno dei modelli proposti. Infatti l'andamento angolare dei protoni ad alta energia che obbedisce a una pura legge del  $\sin^2 \theta$  (Fig. 60) che è caratteristica di assorbimento di dipolo elettrico, porta ad escludere il modello a quasi-deutone che darebbe una evidente interferenza dipolo-quadrupolo (elettrico); mentre sembra anche da escludere il modello a particelle indipendenti del tipo di Courant che potrebbe essere compatibile con i risultati solo nell'ipotesi che la maggior parte dei protoni emessi possieda momento angolare orbitale zero nel nucleo prima dell'eccitazione, cosa che sembra assai improbabile.

Anche TOMS e STEPHENS [T 55] studiano in emulsione nucleare la distribuzione angolare dei fotoprotoni dal tantalio con raggi  $\gamma$  da bremsstrahlung di 23 MeV trovando una distribuzione quasi isotropa (Fig. 61) (a differenza del Pb analizzato nella stessa esperienza). In Fig. 61 la distribuzione è data per tutti i protoni, per quelli di energia compresa tra 8 e 12 e infine per quelli di energia  $>13$  MeV. Il numero di protoni è molto più abbondante di quello previsto dalla teoria evaporativa.

BARBER e coll. [B 58] fanno studi preliminari sulla reazione  $(\gamma, p)$  per l'interesse presentato dalla distribuzione energetica che presenta un mas-

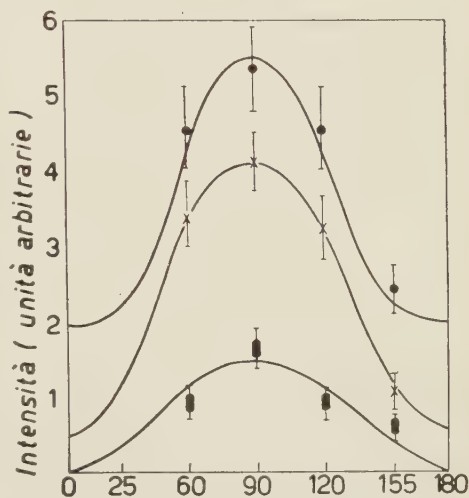
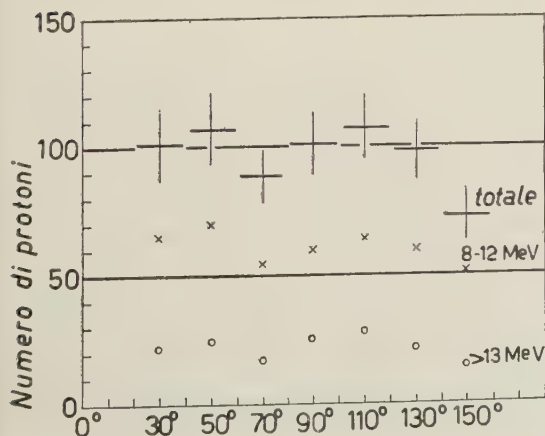


Fig. 60. - Distribuzioni angolari dei fotoprotoni da tantalio:  $\bullet$   $E_{\max} = 25$  MeV;  $\times$   $E_{\max} = 38$  MeV,  $\blacksquare$   $E_{\max} = 65$  MeV [Hf 53].



simo principale a 9.4 MeV e un altro più piccolo a 11.7 MeV. Lo studio, tuttora in corso, si riferisce alla misura delle curve di eccitazione per questi due diversi gruppi di protoni per sapere quali sono le energie dei fotoni responsabili di essi.

Fig. 61. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni dal tantalio [T 55].

$$W(\gamma, n)$$

POSS [Po 50] fa misure sulla reazione  $(\gamma, n)$  rivelando i neutroni con la  $^{28}\text{Al}(n, p)^{27}\text{Mg}$  e usando raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 20$  MeV. Naturalmente con l'Al vengono rivelati solo i neutroni veloci e quindi la distribuzione angolare si riferisce a questi; si ha una prevalenza di neutroni a  $90^\circ$  con un rapporto di intensità a  $90^\circ$  e  $0^\circ$  di  $N_{90^\circ}/N_{0^\circ} \sim 2.0 \pm 0.5$ .

$$^{197}\text{Au}(\gamma, n)$$

CAVALLARO e coll. [Cv 58] studiano lo spettro energetico dei fotoneutroni dall'oro irradiando con  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 30$  MeV. Lo spettro differisce in due punti da quello calcolato con la teoria evaporativa: si nota cioè una coda alle alte energie che si può interpretare come effetto diretto; un buon accordo lo si trova nella ipotesi che circa il 15% dei neutroni provengano da processo diretto; l'altro punto di disaccordo con lo spettro evaporato si trova nella posizione del massimo che sperimentalmente risulta un po' spostato verso le alte energie; gli autori tuttavia non attribuiscono una eccessiva importanza a questo disaccordo sia perchè un accordo migliore lo si può ottenere con una opportuna densità dei livelli nucleari (si noti però che un accordo tra il massimo sperimentale e quello teorico darebbe maggiori divergenze nelle altre parti dello spettro), sia infine perchè in questa parte dello spettro (tra 1 e 2 MeV) gli errori sperimentali sono notevoli. Una analoga situazione la si trova per lo spettro dei fotoneutroni da Pb( $\gamma, n$ ).

$$^{197}\text{Au}(\gamma, p)$$

DAWSON [D 56] esamina la distribuzione energetica ed angolare dei fotoprotoni dall'oro (sempre con  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 70$  MeV). Tuttavia non è stato possibile adattare la distribuzione energetica sperimentale con combinazioni di protoni evaporati e diretti. La difficoltà sta nel fatto che si ha un forte subitaneo aumento della curva della distribuzione energetica tra 8 e 10 MeV.

L'andamento è simile a quello ottenuto per il bismuto da TOMS e STEPHENS [T 53]; quanto alla distribuzione angolare, tra 8 e 11 MeV è circa isotropa mentre tra 11 e 17 MeV va come  $a + b(\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$  con  $b/a = p = 1.0$  (v. anche Al, Cu e Rh per i quali nuclei DAWSON esegue una analoga esperienza).

$\text{Pb}(\gamma, n)$ 

POSS [Po 50] rivela fotoneutroni con  $^{28}\text{Al}(n, p)^{27}\text{Mg}$  trovando  $N_{10}/N_0 \sim 2.0 \pm 0.5$ ; anche DEMOS e coll. [D 52] misurano i neutroni da Pb con  $^{31}\text{P}(n, p)$  usando  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 16 \text{ MeV}$  (con l'acceleratore lineare di elettroni del M.I.T.) e trovano una distribuzione angolare della forma  $a + b \sin^2 \theta$  con  $b/a = 0.34 \pm 0.07$ . (Fanno anche misure preliminari su altri elementi pesanti trovando anisotropie dello stesso ordine di grandezza).

GELLER e coll. [G54] studiano la distribuzione angolare dei fotoneutroni con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 22 \text{ MeV}$ ; la distribuzione risulta quasi isotropa e se si pone nella forma  $a + b \sin^2 \theta$ , è  $b/a < 0.12$ . Nell'ipotesi che la componente anisotropa sia dovuta a processo diretto, questo contribuisce per meno dell'1% alla sezione d'urto.

DIXON [D 55] dà per la distribuzione angolare un rapporto  $b/a = -0.08 \pm 0.08$ . Come si vede, la distribuzione è quasi isotropa. L'esperienza è fatta con  $\gamma$  di bremsstrahlung di 70 MeV e riguarda altri 6 elementi (Sn, Fe, Cu, C, Al, Be).

Per quanto riguarda la distribuzione energetica, la rivelazione viene fatta in emulsione nucleare e si nota che la maggior parte dei neutroni può attribuirsi a processo evaporativo governato da una temperatura nucleare costante ( $\sim 1.0 \text{ MeV}$ ); solo una piccola coda alle alte energie mostra una piccola percentuale di processo diretto (Fig. 62).

TOMS e STEPHENS [T 57] studiano i fotoneutroni da Pb con  $\gamma$  da bremsstrahlung di  $E_{\text{max}} = 23 \text{ MeV}$  osservando il rinculo dei protoni in emulsioni nucleari. La distribuzione energetica ha un massimo intorno a 1.75 MeV.

I risultati si possono spiegare con 90% di teoria evaporativa con una temperatura nucleare del nucleo residuo di 1.35 MeV, mentre l'effetto diretto contribuisce al restante 10%. La distribuzione angolare dei neutroni più veloci è quasi isotropa.

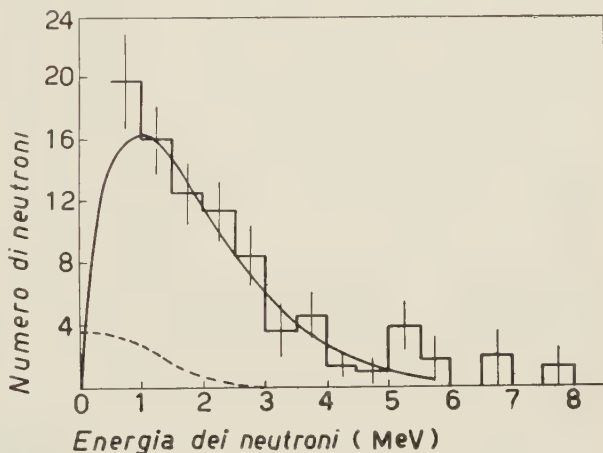


Fig. 62. - Distribuzione energetica dei fotoprotoni dal piombo. Le curve continue e tratteggiate sono calcolate per evaporazione rispettivamente del primo e del secondo neutrone [D 55].



Infatti per neutroni con energia  $> 4$  MeV (che rappresentano il 19% del numero totale) la distribuzione angolare ha la forma  $a + b \sin^2 \theta$  con  $b/a \sim 0.23$ . Questo è in accordo con il valore 0.7 predetto da WILKINSON [Wi 56] osservando che la parte isotropa  $a$  consiste di due parti  $a_1$  e  $a_2$ . La prima parte,  $a_1$ , è il contributo ( $\sim 67\%$ ) che proviene dai neutroni evaporati mentre  $a_2$  è il contributo isotropo dell'effetto diretto. Ora è proprio  $b/a_2 = 0.7$ .

### $^{208}\text{Pb}(\gamma, n)$

TOMS e STEPHENS [T 55] esaminano in emulsione nucleare i fotoprotoni dall'isotopo arricchito  $^{208}\text{Pb}$  usando raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\max} = 23$  MeV, A differenza dei risultati trovati col Ta, la distribuzione angolare (Fig. 63)

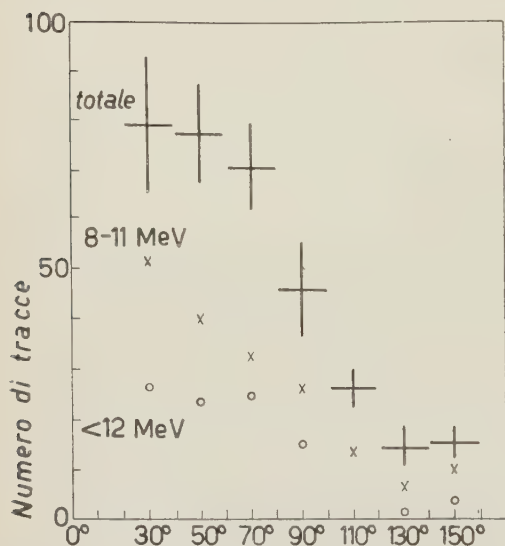


Fig. 63. — Distribuzione angolare dei fotoprotoni da  $^{208}\text{Pb}$  [T 55].

mostra una asimmetria in avanti e perciò non si ha solo assorbimento di dipolo elettrico (che dovrebbe avere distribuzione simmetrica attorno ai  $90^\circ$ ) ma anche di quadrupolo elettrico che con il suo effetto di interferenza dà una asimmetria in avanti con un massimo a  $45^\circ$ . Non è sufficientemente chiaro se i più alti punti sperimentali che si trovano più in avanti di  $45^\circ$ , siano abbastanza sicuri da far ritenere che vi sia anche assorbimento di ottupolo.

L'alto numero di fotoprotoni osservati indica che si tratta di un processo diretto: si trova infatti che i fotoprotoni osservati sono 1300 volte superiori a quelli previsti dalla teoria evaporativa.

La Fig. 63 mostra la distribuzione angolare per tutti i protoni, per quelli con energia compresa tra 8 e 11 MeV e infine per quelli con energia  $> 12$  MeV. I pochi protoni con energia  $> 15$  MeV possono provenire dalla piccola percentuale di  $^{207}\text{Pb}$  presente (2.3%).

### $^{209}\text{Bi}(\gamma, n)$

POSS [Po 50] rivela i neutroni con  $^{28}\text{Al}(n, p)^{27}\text{Mg}$ . L'esperienza è fatta con raggi  $\gamma$  da un betatrone di  $E_{\max} = 20$  MeV. A causa del rivelatore usato, rivela circa 1/10 dei fotoneutroni totali: quelli più veloci che riescono ad attivare



l'Al. Il risultato dell'esperienza indica che i neutroni sono emessi prevalentemente ad angolo retto con un rapporto di intensità  $N_{90^\circ}/N_{0^\circ} \sim 2.0 \pm 0.5$ .

Anche PRICE [P 54] misura i fotoneutroni da bismuto e trova una componente anisotropa maggiore di quella di qualsiasi altro elemento. L'esperienza è fatta con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung di  $E_{\max} = 22$  MeV. In generale si trova una piccola componente anisotropa che ha un massimo a  $90^\circ$ . La rivelazione dei fotoneutroni è fatta con Al e si riferisce a neutroni di energia  $> 4$  MeV; la deviazione dall'isotropia è più forte negli elementi pesanti che non nei leggeri. In particolare per il bismuto la componente anisotropa è circa il 21 %. Invece un rivelatore di neutroni epitermici mostra che i fotoneutroni sono emessi isotropicamente. (In una esperienza precedente in cui misuravano  $(\gamma, n)$  per circa 53 elementi PRICE e KERST [P 50] trovano simmetria sferica eccetto per il deuterio e il berillio).

FERRERO e coll. [Fe 56], [F 56] e [Fe 57], fanno un particolare studio sui neutroni veloci prodotti nelle fotoreazioni sul bismuto per diverse energie massime dei  $\gamma$ . I neutroni vengono rivelati con diversi tipi di rivelatori (n, p).

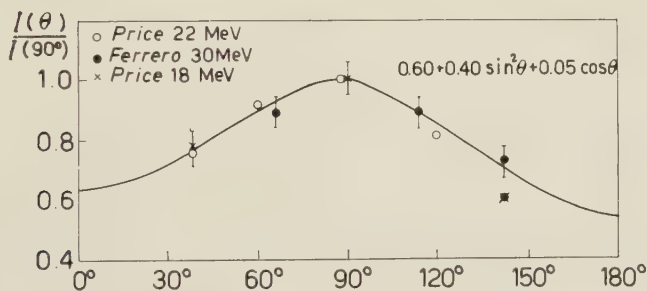


Fig. 64. - Distribuzione angolare dei neutroni dal Bi irradiato con bremsstrahlung di 31 MeV e rivelati con Al(n, p) [Fe 56].

La distribuzione angolare misurata per bremsstrahlung da 30 MeV con rivelatore  $^{27}\text{Al}(n, p)$  è data in Fig. 64 ed ha la forma  $a + b \sin^2 \theta + c \cos \theta$  con  $b/a = 0.67 \pm 0.1$  (il valore trovato da PRICE [P 54] era invece  $b/a = 1$ ). In Fig. 65 è invece mostrata la distribuzione angolare misurata con l'uso del rivelatore  $^{28}\text{Si}(n, p)$ : si vede che tale distribuzione è molto asimmetrica; il valore di  $b/a$  è  $1.00 \pm 0.1$ .

Una misura fatta con bremsstrahlung di 20 MeV dà per  $b/a$  il valore  $0.9 \pm 0.1$ ; benchè qui la statistica sia più povera a causa della minore intensità del beta-trone, tuttavia i valori sono più significativi per il fatto che il fondo è completamente trascurabile e il contributo proviene essenzialmente dalla risonanza gigante.

Quanto alla distribuzione energetica si ha indicazione che il  $(7 \pm 3)\%$  dei neutroni sono nel gruppo veloce, ossia al disopra di quello che si attende sulla base della teoria statistica (mentre per PRICE, come si è visto, questo numero è più elevato).

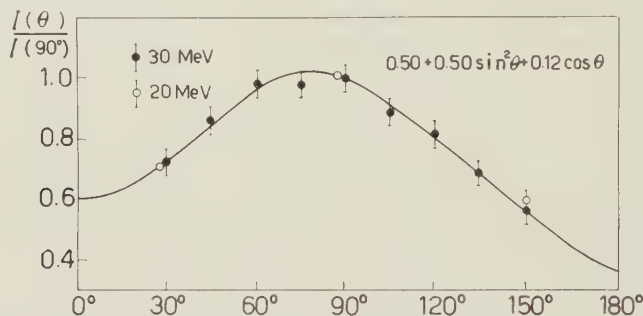


Fig. 65. — Distribuzione angolare dei neutroni dal Bi irradiato con bremsstrahlung di 20 e 30 MeV e rivelati con Si(n, p) [Fe 56].

Le misure indicano che i neutroni veloci sono prodotti essenzialmente nella zona della risonanza gigante confermando ulteriormente che la risonanza gigante va attribuita a forti transizioni di particelle individuali piuttosto che a un tipo collettivo di assorbimento fotonico.

FERRERO e coll. richiamano l'attenzione sul fatto che i fotoni assorbiti attraverso transizioni individuali di fotoni conducono a una eccitazione generale del nucleo poichè i protoni hanno poca probabilità di penetrare la barriera coulombiana. Queste transizioni rendono conto del 50% dell'intensità totale dei neutroni ma non danno contributo al caratteristico gruppo veloce dei neutroni. Il restante 50% delle transizioni può considerarsi come transizioni di dipolo elettrico dalla shell superiore chiusa di neutroni. Le più forti di queste sono  $1i_{9/2} \rightarrow 1i_{11/2}$  e  $1i_{13/2} \rightarrow 1j_{15/2}$  conducenti a stati finali in cui il neutrone ha momento angolare 6 e 7 rispettivamente. La barriera centrifuga relativamente alta aumenta la vita media di questi stati per cui diventa importante l'interazione di questi neutroni col resto del nucleo. Tenendo conto di questa interazione, le transizioni da questi stati superiori contribuiscono largamente alla distribuzione statistica per cui i più notevoli contributi al gruppo veloce di neutroni andranno attribuiti ad altre transizioni. Sembra che il più grande contributo a questi, secondo calcoli basati sul modello di Wilkinson, derivi dalle transizioni  $2f \rightarrow 2g$  per cui la barriera centrifuga è più piccola. La frazione media di neutroni che viene emessa in questa transizione è circa il 10% il che dà una componente veloce che è  $\sim 5\%$  dei neutroni totali. Questo è in accordo abbastanza buono col valore sperimentale trovato che, come si è detto,

è circa del 7%, mentre il valore di  $b/a$  ottenuto sulla base di questo modello è 0.90 in accordo col valore osservato a 20 MeV.

Sempre con raggi  $\gamma$  di bremsstrahlung LAZAREVA e coll. [L 56] osservano la distribuzione angolare ed energetica dei fotoneutroni; i  $\gamma$  hanno una  $E_{\max} = 18.9$  MeV e i neutroni vengono rivelati in emulsioni nucleari da 400  $\mu\text{m}$ . Lo spettro energetico mostra un eccesso di fotoneutroni di alta energia rispetto allo spettro calcolato con la teoria statistica. La distribuzione angolare di questi neutroni d'alta energia è anisotropa con un massimo verso i  $45^\circ \div 90^\circ$ . Questa anisotropia aumenta al crescere dell'energia dei fotoneutroni osservati.

$$^{209}\text{Bi}(\gamma, p)$$

Anche per il  $^{209}\text{Bi}$  TOMS e STEPHENS [T 53] come per il Ce e per l'In misurano la distribuzione energetica ed angolare dei fotoprotoni rivelandoli con emulsioni nucleari. I  $\gamma$  usati sono quelli di bremsstrahlung provenienti da un betatrone di  $E_{\max} = 24$  MeV.

La distribuzione energetica è interpretabile facendo intervenire una larga parte di fotoeffetto diretto (Fig. 66) mentre la distribuzione angolare è tipica

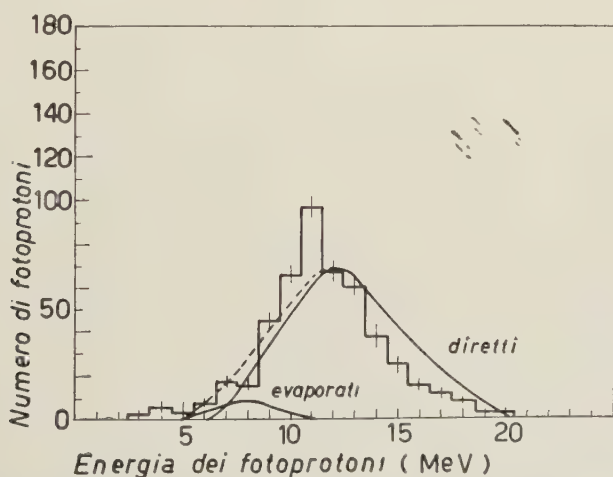


Fig. 66. - Distribuzione energetica dei fotoprotoni da Bi con le curve, mostrate per confronto, calcolate per protoni diretti ed evaporati [T 53].

dell'effetto di interferenza dipolo-quadrupolo mostrando una marcata asimmetria in avanti. Se tuttavia si considerano tutti i fotoprotoni dal bismuto, si ha un eccesso a  $30^\circ$  (Fig. 67) che non rientra in una distribuzione del tipo  $a + b(\sin \theta + p \sin \theta \cos \theta)^2$  e solo la distribuzione angolare dei fotoprotoni con

$E > 10$  MeV può ricondursi a curve del tipo detto con  $p \sim 2$  e  $b/a \sim \frac{3}{2}$ . Anche qui il rapporto  $\sigma(\gamma, p)/\sigma(\gamma, n)$  è maggiore di quello che ci si attende dalla teoria evaporativa.

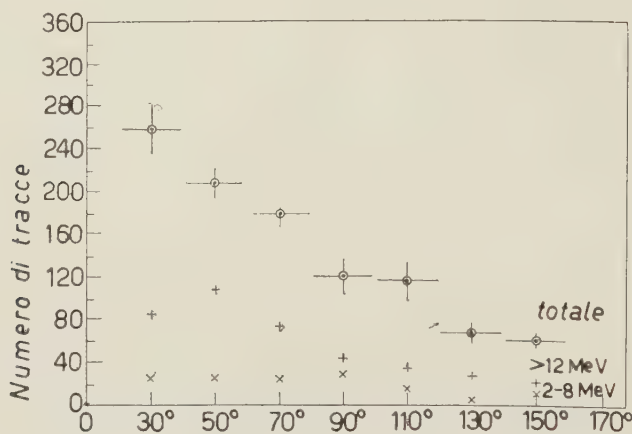


Fig. 67. - Distribuzione angolare dei fotoprotoni da Bi [T 53].

### 3. - Conclusioni.

Il materiale sperimentale è dunque molto abbondante e si possono già trarre alcune importanti conclusioni; tuttavia mancano ancora per diversi nuclei le distribuzioni angolari ed energetiche delle fotoparticelle mentre altri nuclei sono stati studiati solo nella loro abbondanza isotopica naturale; sarebbe interessante anche conoscere il comportamento degli isotopi puri (così come è stato fatto ad esempio per il Mg) poichè il mescolamento dei vari isotopi potrebbe mascherare o simulare certi risultati come quello, per esempio, dello sdoppiamento del massimo della risonanza gigante (che è stato trovato nel Cr, As, I [F 57], nell'Eu [Co 58], nel Tb [F 58] e da vari autori nel Ta) e le differenze potrebbero essere notevoli in vicinanza dei numeri magici (ad esempio lo Zr naturale contiene l'isotopo 90, magico nei neutroni, solo per il 48.0%). Si noti per esempio l'andamento delle sezioni d'urto per gli isotopi del Si come mostrato in Fig. 68 (l'esperienza è di KATZ e coll. [Ka 54]) dove si vede che si hanno due massimi distinti per la  $\sigma(\gamma, p)$  di  $^{29}\text{Si}$  e di  $^{30}\text{Si}$ .

Comunque lo sdoppiamento della risonanza gigante è stato particolarmente studiato nel caso del nucleo del  $^{191}\text{Ta}$  e si è visto che la maggior parte delle esperienze al riguardo mette bene in evidenza i due massimi. Così FULLER [Fu 58] risolve due massimi a 12.4 e 15.4 MeV con larghezza di 2.3 e 4.4 MeV rispettivamente, SPICER [S 58] trova due risonanze in accordo con FULLER e



anche il gruppo di Torino e Catania trova un secondo massimo (vi è tuttavia l'esperienza di CARVER [Ca 58] che dà un solo massimo a 14.5 MeV largo 6.3 MeV). Anche in altri nuclei, come si è già detto, e cioè nel Tb [F 58], nell'Eu 151 e 153 [Co 58], nel Cr, nell'As e nello I [F 58], sono stati messi in evidenza due massimi. Anche PETEREE e coll. [P 57] trovano che la risonanza gigante per nuclei con grandi deformazioni di quadrupolo ha una larghezza molto più grande di quelli con piccola deformazione. Ad esempio la larghezza intera a metà massimo è  $\sim 10$  MeV per Er e Ho rispetto ai 6 MeV per Au e Pb e 7 MeV per Sn.

Ciò sembra quindi confermare la teoria di DANOS [Da 56] e [D 58] il quale generalizza il modello idrodinamico dei processi fotonucleari estendendolo al caso di nuclei deformati e trova che gli autovalori dell'oscillazione di dipolo sono sdoppiati. Questo fatto produce una maggiore larghezza  $\Gamma$  della risonanza e una asimmetria nell'andamento della risonanza che dipende dal segno del momento di quadrupolo; il rapporto delle due frequenze di risonanza è, con buona approssimazione, dato dal rapporto degli assi intrinseci dell'ellissoide mentre la sezione d'urto d'assorbimento consisterà nella sovrapposizione di questi due massimi che, se non risolti, appariranno come una maggiore larghezza delle risonanze. Più esattamente si trova che se la separazione delle due frequenze  $\omega_a - \omega_b \leq \frac{1}{2}\Gamma$ , la sezione d'urto consiste essenzialmente di un massimo largo, mentre se  $\omega_a - \omega_b > \Gamma$  allora si vedono due massimi; precisamente in un nucleo con momento di quadrupolo positivo è  $a > b$  e il massimo più alto è a più alta energia; inversamente in un nucleo con momento di quadrupolo negativo il massimo più alto è a più bassa energia.

Anche OKAMOTO [Ok 56] e [Ok 58] mette in evidenza una stretta correlazione tra larghezza della risonanza gigante e momenti di quadrupolo (e quindi con le deformazioni nucleari). Il fatto sperimentale più notevole è che i valori della larghezza  $\Gamma$  della risonanza sono piccoli per numeri magici e, nell'insieme, presentano un comportamento simile a quello dei momenti di quadrupolo nucleari. In Fig. 69 e 70 è mostrata questa analogia; in Fig. 69 i momenti di quadrupolo sono quelli presi dalle esperienze spettroscopiche mentre in Fig. 70 sono quelli ottenuti da esperienze di eccitazione coulombiana. È la notevole so-

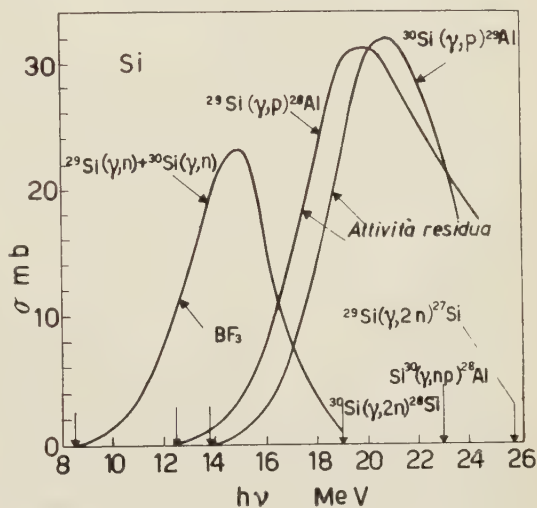


Fig. 68. - Sezioni d'urto per  $^{29}\text{Si}$  e  $^{30}\text{Si}$  [Ka 54].



miglianza dei due andamenti, come risulta ad es. dalla Fig. 70, che suggerisce una forte relazione tra essi; ora, com'è noto, l'energia di risonanza  $E_0$  della vibra-

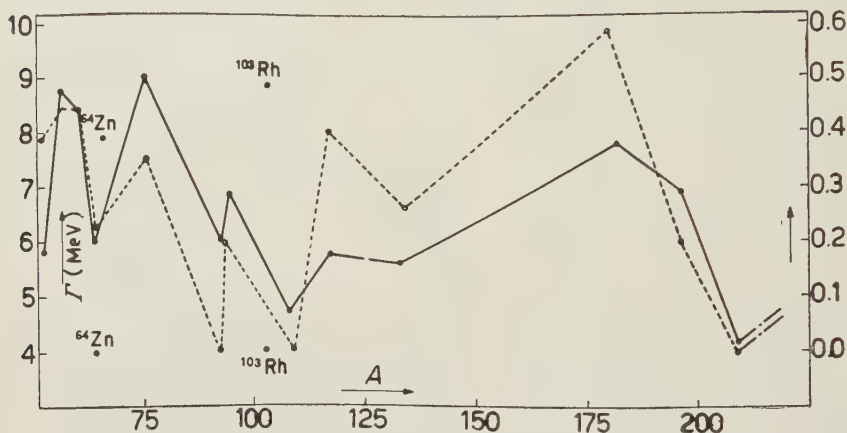


Fig. 69. — Eccentricità e larghezza della risonanza in funzione del numero di massa  $A$ . La linea è continua per la larghezza e la tratteggiata per le eccentricità. Nelle ordinate a sinistra sono le larghezze in MeV e a destra le eccentricità.  $^{64}\text{Zn}$  e  $^{103}\text{Rh}$  sembrano eccezioni e non sono inclusi nelle curve [Ok 56].

zione di dipolo è strettamente collegata con il raggio nucleare: è  $E_0 \propto R_0^n$  dove  $n = 1$  secondo il modello di STEINWEDEL e JENSEN [S 50],  $n = \frac{1}{2}$  secondo

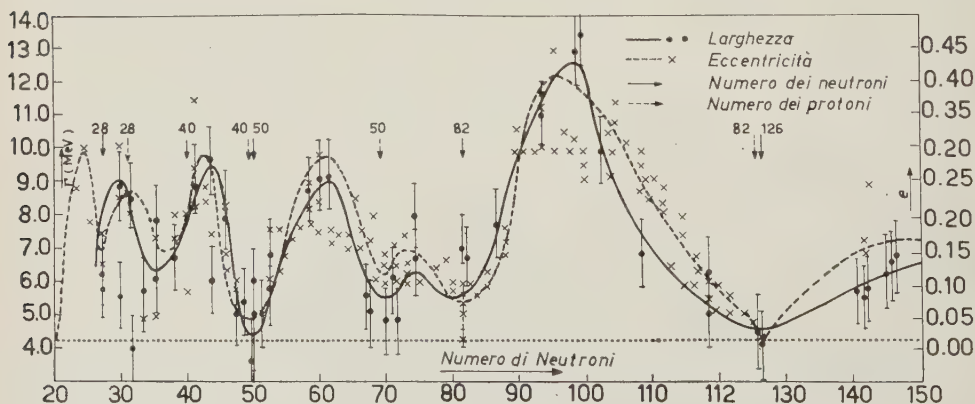


Fig. 70. — Correlazioni tra eccentricità nucleare e larghezza delle risonanze. Le croci sono le eccentricità e i cerchi aperti sono le risonanze per numeri non magici mentre i cerchi chiusi sono le risonanze per numeri magici. Le curve tratteggiate e continue sono per l'eccentricità e per la larghezza delle risonanze rispettivamente. Le frecce indicano i numeri magici: le continue per i neutroni e le tratteggiate per i protoni. La linea retto punteggiata indica la larghezza intrinseca  $\Gamma_0 \sim 4.2$  MeV. L'incertezza della risonanza è presa 1 MeV e per l'eccentricità (20 ÷ 30)% del suo valore [Ok 58].

GOLDHABER e TELLER [Go 48] e circa  $\frac{1}{2}$  dagli esperimenti. Se però il nucleo anziché essere una sfera è uno sferoide, allora il livello di risonanza corrispondente alla vibrazione di dipolo si scinde in due livelli i cui valori dell'energia possono approssimarsi con  $E_1 \propto R_1^{-n}$  e  $E_2 \propto R_2^{-n}$ ; se queste due risonanze si sovrappongono, quello che si osserva è una larghezza totale maggiore; si ha  $\Delta E/E_0 = (R_2^{-n} - R_1^{-n})/R_0^{-n} = 5nQ_0/4ZR_0^2$ , perciò il valore di  $\Delta E$  si ricava usando i valori sperimentali di  $E_0$  e dell'eccentricità; si fa inoltre l'ipotesi che la larghezza delle due risonanze resti la stessa  $\Gamma_0$  che si ha per un nucleo sferico e si pone per i nuclei deformati  $\Gamma = \Gamma_0 + \Delta\Gamma$  dove si approssima  $\Delta\Gamma$  con  $\Delta E$ . I valori di  $\Gamma$  calcolati in questo modo sono in accordo con l'esperienza se si prende  $n = 1$  e per  $\Gamma_0$  un valore di  $\sim 4.2$  MeV (detto «larghezza intrinseca») dedotto dai nuclei sferici.

Per quanto riguarda la distribuzione energetica si è visto che per la maggior parte dei nuclei vi è una tendenza generale ad avere una coda di fotoparticelle ad alta energia che non rientrano quindi in una distribuzione di tipo evaporativo, anche per la presenza molte volte ben marcata di massimi e raggruppamenti di fotoparticelle; questi massimi, si è visto, non derivano solo da transizioni a diversi livelli del nucleo residuo, ma rappresentano vere e proprie risonanze nel processo d'assorbimento indicando chiaramente una struttura fine della risonanza gigante. È vero che si notano ancora molte discrepanze nel confronto delle esperienze dei diversi autori: tipico il caso dei livelli risonanti nel  $^{12}\text{C}$  che sono 19 per KATZ [K 58] tra 18.7 e 22.8 MeV, 5 per BASILE e GUSAKOW [Ba 58] tra 18.7 e 23 MeV, mentre WOLFF [W 58] non ne trova nessuno tra 20.3 e 20.8 MeV; a proposito di questo LEVINGER [L 58] fa notare che ci si può attendere che alcuni livelli del C (e anche dell'O) attorno ai 20 MeV siano molto diffusi a causa della grande larghezza per emissione di un protone o di un neutrone; altri livelli dello stesso spin e parità possono invece essere molto stretti poichè la larghezza per emissione di una particella può essere piccola se lo stato composto si sovrappone poco con quello del modello a shell; quindi, sempre secondo LEVINGER, ogni controversia circa l'esistenza di livelli discreti deve riguardare particolari livelli. LEVINGER è portato a pensare che le larghezze per emissione di una particella tendono ad essere moderatamente larghe per quei livelli che contribuiscono maggiormente alla sezione d'urto d'assorbimento fotonico: per questi livelli ci si può attendere che le loro funzioni d'onda si sovrappongano bene con uno stato risultante dall'emissione di una particella. Anche secondo TZARA [T 56], come si è visto, le risonanze sono piuttosto larghe con almeno  $\Gamma_n > 400$  keV.

Tuttavia la struttura fine sembra ben stabilita per il processo di assorbimento da parte di diversi nuclei leggeri come il  $^{12}\text{C}$  il  $^{14}\text{N}$  il  $^{16}\text{O}$ , ed anche per nuclei come il  $^{19}\text{F}$  [Ta 54] e [Gl 54] e il  $^{27}\text{Al}$  [B 58].

Quanto alla distribuzione angolare per quello che riguarda i fotoneutroni si ha spesso un andamento anisotropo, specialmente per la parte alta dello

spettro ossia per i neutroni più veloci; tuttavia si ha sempre simmetria attorno a  $90^\circ$  e la distribuzione può essere posta nella forma  $a + b \sin^2 \theta$ ; questo non è necessariamente evidenza di effetto diretto: infatti anche il modello statistico può dare un allontanamento dall'isotropia; il modello statistico predice una distribuzione angolare isotropa se parecchi stati finali possono essere raggiunti dalla emissione di una particella in un dato intervallo energetico, ma se solo pochi stati sono raggiungibili, come nella parte ad alta energia dello spettro maxwelliano, allora anche il modello statistico dà deviazione dell'isotropia, restando tuttavia una distribuzione simmetrica attorno a  $90^\circ$ . Quanto al rapporto  $b/a$ , non è molto facile allo stato attuale fare dei precisi confronti fra i diversi nuclei e darne un andamento col numero di massa  $A$ , sia perchè le varie esperienze si riferiscono a diverse energie  $E_{\max}$  dei  $\gamma$  di bremsstrahlung, sia perchè i rivelatori usati non sono tutti sensibili nella stessa maniera alla energia dei neutroni e perchè infine i valori di  $b/a$  si riferiscono a neutroni in intervalli energetici diversi per i vari nuclei.

Tuttavia sembra di poter intravedere una diminuzione del rapporto  $b/a$  al crescere di  $A$ : si ha cioè una tendenza all'isotropia via via che si passa da nuclei leggeri a nuclei pesanti.

Il fatto che PRICE [P 54] trovi un andamento inverso e cioè un aumento di  $b/a$  al crescere di  $A$ , dipende dal rivelatore usato che è  $\text{Al}(n, p)$  e che è sensibile solo ai neutroni che hanno energia superiore a una certa soglia; andando allora verso i nuclei pesanti, si ha che i neutroni evaporati tendono ad avere energia più bassa (perchè la temperatura nucleare è più bassa), e quindi il rivelatore perde un maggior numero di neutroni isotropi donde la parvenza di una maggiore anisotropia. Invece lo studio fatto su 8 elementi (Be, C, Al, Fe, Cu, Sn, Pb) da DIXON [D 55] che rivela i neutroni con un rivelatore non critico sull'energia (è uno scintillatore di lucite e solfuro di zinco), indica una diminuzione di  $b/a$  col numero di massa  $A$  che si può quindi interpretare come una indicazione qualitativa della relativa importanza del processo di evaporazione e del processo diretto.

Per quanto riguarda la distribuzione angolare dei fotoprotoni, questa molto spesso presenta, oltre ad un andamento anisotropo, anche una notevole asimmetria rispetto a  $90^\circ$  con una preferenza verso gli angoli in avanti. Questa asimmetria è una indicazione di un effetto di interferenza dipolo-quadrupolo. Scritta la distribuzione angolare nella forma  $a + b \sin^2 \theta (1 + p \cos \theta)^2$ , il numero  $p$  indica l'importanza di questa interferenza. Il rapporto  $p^2/5$  è uguale al rapporto tra la sezione d'urto di quadrupolo  $\sigma_q$  e di dipolo  $\sigma_d$  e dà quindi la percentuale di  $\sigma_q$  presente.

In Tabella I si riportano i valori misurati di  $p$  per alcuni nuclei e del rapporto  $\sigma_q/\sigma_d$ ; nella quarta colonna è riportata l'energia massima  $E_{\max}$  dei  $\gamma$  di bremsstrahlung (se l'esperienza è fatta a più di una  $E_{\max}$ , una freccia indica il senso in cui cresce  $p$  e  $\sigma_q/\sigma_d$  al crescere dell'energia) e nella quinta l'intervallo

energetico dei protoni considerati; infine nell'ultima colonna è data la bibliografia.

Come si è già osservato per i fotoneutroni, anche nel caso dei fotoprotoni, per le stesse ragioni dette, è difficile per il momento dare un andamento di  $p$

TABELLA I.

Nuclei	$p$	$\sigma_n/\sigma_d$ o/o	$E_{\max}$ (MeV)	Intervallo energetico dei protoni considerati	Biblio- grafia
$^9\text{Be}$	$0.85 \div 1$	$15 \div 20$	30 42 60 80	tutti i protoni	[K 56]
$^{12}\text{C}$	$\xrightarrow{0.25}$	$\xrightarrow{1}$	$\xrightarrow{23}$	tutti i protoni	[H 52]
$^{12}\text{C}$	$\xrightarrow{0.8}$	$\xrightarrow{13}$	$\xrightarrow{65}$	protoni $> 14$ MeV	[J 55]
$^{12}\text{C}$	$0.5 \div 0.75$	$5 \div 11$	30 42 60 80	tutti i protoni	[K 56]
$^{12}\text{C}$	$\xrightarrow{0.6}$	$\xrightarrow{7}$	$\xrightarrow{35}$	protoni $> 7$ MeV	[L 57]
$^{12}\text{C}$	$\xrightarrow{0.6}$	$\xrightarrow{7}$	$\xrightarrow{31}$	protoni $> 5.5$ MeV	[M 57]
$^{12}\text{C}$	$\xrightarrow{0.3}$	$\xrightarrow{1.8}$	$\xrightarrow{20 \div 40}$	per protoni di $\sim 6$ MeV	[B 58]
$^{15}\text{N}$	$\xrightarrow{0.24}$	$\xrightarrow{1}$	$\xrightarrow{18.7 \text{ e } 24.6}$	9.3 $\div$ 14 MeV	[R 58]
$^{16}\text{O}$	$\xrightarrow{0.2}$	$\xrightarrow{0.8}$	$\xrightarrow{70}$	protoni $> 10.5$ MeV	[Li 56]
$^{27}\text{Al}$	$\xrightarrow{0.7}$	$\xrightarrow{10}$	$\xrightarrow{40 \text{ e } 65}$	protoni a più alta energia	[Hf 53]
$^{27}\text{Al}$	$\xrightarrow{1.35}$	$\xrightarrow{36}$	$\xrightarrow{65}$	protoni $> 14$ MeV	[J 55]
Si {	$\xrightarrow{0.75}$	$\xrightarrow{11}$	$\xrightarrow{30}$	protoni $> 7$ MeV	[E 58]
	$\xrightarrow{0.57}$	$\xrightarrow{6}$	$\xrightarrow{30}$	protoni $> 5.5$ MeV	[E 58]
$^{59}\text{Co}$	$\xrightarrow{0.5}$	$\xrightarrow{5}$	$\xrightarrow{23}$	tutti i protoni	[M 52]
$^{59}\text{Co}$	$\xrightarrow{1}$	$\xrightarrow{20}$	$\xrightarrow{24}$	tutti i protoni	[To 54]
Ni	$\xrightarrow{1.45}$	$\xrightarrow{40}$	$\xrightarrow{65}$	protoni $> 14$ MeV	[J 55]
Cu	$\xrightarrow{0.5}$	$\xrightarrow{5}$	$\xrightarrow{23}$	tutti i protoni	[M 52]
Mo	$\xrightarrow{2}$	$\xrightarrow{80}$	$\xrightarrow{65}$	protoni $> 14$ MeV	[J 55]
$^{103}\text{Rh}$ {	$\xrightarrow{0.2}$	$\xrightarrow{0.8}$	$\xrightarrow{70}$	7 $\div$ 10 MeV	[D 56]
	$\xrightarrow{0.3}$	$\xrightarrow{1.8}$	$\xrightarrow{70}$	10 $\div$ 16 MeV	[D 56]
In	$0.75 \div 1$	$11 \div 20$	$\xrightarrow{23}$	tutti i protoni	[T 53]
$^{197}\text{Au}$	$\xrightarrow{1.0}$	$\xrightarrow{20}$	$\xrightarrow{70}$	11 $\div$ 17 MeV	[D 56]
$^{209}\text{Bi}$	$\xrightarrow{2}$	$\xrightarrow{80}$	$\xrightarrow{24}$	protoni $> 10$ MeV	[T 53]

in funzione del numero di massa  $A$  o del numero atomico  $Z$  e sarebbe pertanto assai interessante eseguire delle misure di  $p$  studiando le distribuzioni angolari dei fotoprotoni per isotopi puri e per una ben determinata energia dei  $\gamma$  incidenti.



## BIBLIOGRAFIA

- [A 49] D. E. ALBURGER: *Phys. Rev.*, **76**, 435 (1949).
- [A 56] J. R. ATKINSON, I. CRAWFORD, D. R. O. MORISSON, I. PRESTON e I. F. WRIGHT: *Physica*, A **22**, 1145 A (1956).
- [A 58] A. AGODI, S. CAVALLARO, G. CORTINI, V. EMMA, C. MILONE, R. RINZIVILLO, A. RUBBINO e F. FERRERO: *Congresso Internazionale di Fisica Nucleare* (Parigi, 7-12 Luglio 1958).
- [B 51] P. R. BYERLY e W. E. STEPHENS: *Phys. Rev.*, **83**, 54 (1951).
- [B 53] W. A. BUTLER e G. M. ALMY: *Phys. Rev.*, **91**, 58 (1953).
- [B 56] W. L. BENDEL, J. McELHINNEY e R. A. TOBIN: *Bull. Ann. Phys. Soc.*, **1**, 192 (1956).
- [B 58] W. C. BARBER, W. R. DODGE e V. J. VANHUYSE: *NBS Photonic Conference 1958*, Paper B9 e *Bull. Am. Phys. Soc.*, **113**, 173 (1958).
- [Be 51] T. S. BENEDICT and W. M. WOODWARD: *Phys. Rev.* **83**, 1269 L (1951).
- [Bi 51] P. R. BYERLY e W. E. STEPHENS: *Phys. Rev.*, **81**, 473 (1951).
- [Bi 53] N. BIRNBAUM, E. HARTH, L. SEREN e R. A. TOBIN: *Phys. Rev.*, **81**, 479 (1953).
- [C 50] N. W. CURTIS, I. HOENBOSTEL, D. W. LEE e E. O. SALANT: *Phys. Rev.*, **77**, 290 (1950).
- [C 51] E. D. COURANT: *Phys. Rev.*, **82**, 703 (1951).
- [C 53] R. F. CHRISTY: *Phys. Rev.*, **89**, 839 (1953).
- [C 54] R. CHASTEL: *Journ. Phys. et Rad.*, **15**, 459 (1954).
- [C 55] J. H. CARVER, H. J. HAY e E. W. TITTERTON: *Phil. Mag.*, **46**, 841 (1955).
- [C 56] R. CHASTEL: *Journ. Phys. et Rad.*, **17**, 518 (1956); *Compt. Rend. Acad. Sci.*, **242**, 1440 e 2337 (1956); *Physica*, **22**, 1147 A (1956).
- [C 57] J. H. CARVER, R. D. EDGE e K. H. LOKAN: *Proc. Phys. Soc.*, A **70**, 415 (1957).
- [C 58] G. CORTINI, C. MILONE, A. RUBBINO e F. FERRERO: *Nuovo Cimento*, **9**, 85 (1958).
- [Č 58] M. ČUJEC-DOBOVIŠEK: *Congresso Internazionale di Fisica Nucleare* (Parigi, 7-12 Luglio 1958).
- [Ca 53] A. G. W. CAMERON e M. M. HOFFMAN: *Phys. Rev.*, **91**, 473 (1953).
- [Ca 58] J. H. CARVER e W. TURCHINEZ: *NBS Photonic Conference 1958*, Paper S7.
- [Ch 50] R. CHASTEL: *Compt. Rend. Acad. Sci.*, **230**, 2020 (1950).
- [Ck 56] B. C. COOK, A. S. PENFOLD e V. L. TELEGDI: *Phys. Rev.*, **104**, 554 L (1956).
- [Co 56] L. COHEN, A. K. MANN, B. J. PATTON, K. REIBEL, W. E. STEPHENS e E. J. WINHOLD: *Phys. Rev.*, **104**, 108 (1956).
- [Co 58] B. C. COOK: *NBS Photonic Conference 1958*, Paper B5.
- [Cr 53] J. H. CARVER e H. J. HAY: *Phil. Mag.*, **44**, 1191 L (1953).
- [Cr 58] L. CRANBERG: *NBS Photonic Conference 1958*, Paper E4 e *Bull. Am. Phys. Soc.*, II, **3**, 173 (1958).
- [Ct 58] G. CORTINI, M. MILONE, R. RINZIVILLO e A. TRIBUNO: *Nuovo Cimento*, **9**, 188 (1958).
- [Cv 53] J. H. CARVER, R. D. EDGE e D. H. WILKINSON: *Phil. Mag.*, **44**, 404 (1953); *Phys. Rev.*, **89**, 658 (1953).
- [Cv 58] S. CAVALLARO, V. EMMA, C. MILONE e A. RUBBINO: *Nuovo Cimento*, **9**, 736 (1958).
- [D 50] B. C. DIVEN e G. M. ALMY: *Phys. Rev.*, **80**, 407 (1950).



- [D 52] P. T. DEMOS, J. D. FOX, I. HALPERN e J. KOCH: *Phys. Rev.*, **86**, 605 (1952).
- [D 55] W. R. DIXON: *Can. Journ. Phys.*, **33**, 785 (1955).
- [D 56] W. K. DAWSON: *Can. Journ. Phys.*, **34**, 1480 (1956).
- [D 58] M. DANOS: *Nucl. Phys.*, **5**, 23 (1958).
- [Da 55] W. K. DAWSON: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **30**, 22 (1955).
- [Da 56] M. DANOS: *Bull. Am. Phys. Soc.*, II, **1**, 135 (1956).
- [Dw 55] W. K. DAWSON: *Phys. Rev.*, **99**, 1648 (1955).
- [E 55] J. P. ELLIOT e B. H. FLOWERS: *Proc. Roy. Soc.*, **229**, 536 (1955).
- [E 58] V. EMMA, C. MILONE e A. RUBBINO: *Nuovo Cimento*, **9**, 343 (1958).
- [F 54] G. A. FERGUSON, J. HALPERN, R. NATHANS e P. F. YERGIN: *Phys. Rev.*, **95**, 776 (1954).
- [F 55] B. P. FABRICAND, B. ALLISON e J. HALPERN: *Phys. Rev.*, **100**, 1249 A (1955).
- [F 56] F. FERRERO, A. O. HANSON, R. MALVANO e C. TRIBUNO: *Physica*, **22**, 1148 A (1956).
- [F 57] F. FERRERO, R. MALVANO e C. TRIBUNO: *Nuovo Cimento*, **6**, 385 (1957).
- [F 58] E. G. FULLER, M. WEISS e B. PETREE: *NBS Photonuclear Conference 1958*, Paper B2.
- [Fa 56] B. P. FABRICAND, B. ALLISON e J. HALPERN: *Phys. Rev.*, **103**, 1755 (1956).
- [Fe 56] F. FERRERO, A. O. HANSON, R. MALVANO e C. TRIBUNO: *Nuovo Cimento*, **4**, 418 (1956).
- [Fe 57] F. FERRERO, L. GONELLA, R. MALVANO, C. TRIBUNO e A. O. HANSON: *Nuovo Cimento*, **5**, 242 (1957).
- [Fo 54] B. P. FOSTER, G. S. STANDFORD e L. L. LEE: *Phys. Rev.*, **93**, 1069 (1954).
- [Fu 54] E. G. FULLER: *Phys. Rev.*, **96**, 1306 (1954).
- [Fu 57] E. G. FULLER e E. HAYWARD: citato da M. SOGA e J. FUJITA in *Nuovo Cimento*, **6**, 1484 (1957).
- [Fu 58] E. G. FULLER: *Congresso Internazionale di Fisica Nucleare* (Parigi, 7-12 Luglio 1958).
- [G 41] E. GUTH: *Phys. Rev.*, **59**, 325 (1941).
- [G 48] M. L. GOLDBERGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1269 (1948).
- [G 51] D. C. GUGELOT: *Phys. Rev.*, **81**, 151 (1951).
- [G 53] M. GELL-MANN e V. L. TELEGDI: *Phys. Rev.*, **91**, 169 (1953).
- [G 54] K. GELLER, J. HALPERN e P. F. YERGIN: *Phys. Rev.*, **95**, 659 (1954).
- [G 55] H. E. GAVE e E. E. PAUL: *Phys. Rev.*, **97**, 104 (1955).
- [G 56] B. I. GAVRILOV e L. E. LAZAREVA: *Physica*, **22**, 1148 A (1956).
- [G 57] A. N. GORBINOV e V. R. SPIRIDONOV: *Journ. Exp. Theor. Phys.*, **33**, 21 (1957) (*Sov. Phys. Journ. Exp. Theor. Phys.*, **6**, 16 (1958)).
- [Go 54] J. GOLDBERGER e L. KATZ: *Phys. Rev.*, **95**, 471 (1954).
- [Go 48] M. GOLDBERGER e E. TELLER: *Phys. Rev.*, **74**, 1046 (1948).
- [Go 54] J. GOLDBERGER e L. KATZ: *Can. Journ. Phys.*, **32**, 49 (1954).
- [Gr 53] E. R. GRAVES e L. ROSEN: *Phys. Rev.*, **89**, 343 (1953).
- [Gr 56] G. M. GRIFFITHS: *Can. Journ. Phys.*, **34**, 339 (1956).
- [H 47] O. HIRZEL e H. WÄFFLER: *Helv. Phys. Acta*, **20**, 237 (1949).
- [H 49] B. HAMERMESH, M. HAMERMESH e A. WATTEMBERG: *Phys. Rev.*, **76**, 611 (1949).
- [H 51] J. HALPERN e A. K. MANN: *Phys. Rev.*, **83**, 370 (1951).
- [H 52] J. HALPERN, A. K. MANN e M. ROTHMAN: *Phys. Rev.*, **87**, 164 (1952).
- [H 53] T. HUUS e R. B. DAY: *Phys. Rev.*, **91**, 599 (1953).
- [Ha 52] R. N. H. HASLAM, L. KATZ, R. J. HORSLEY, A. G. W. CAMERON e R. MONTALBETTI: *Phys. Rev.*, **87**, 196 A (1952).
- [Ha 53] R. N. H. HASLAM, L. KATZ, E. H. CROSBY, R. G. SUMMERS-GILL e A. G. W. CAMERON: *Can. Journ. Phys.*, **31**, 210 (1953).

- [Hf 53] M. M. HOFFMANN e A. G. W. CAMERON: *Phys. Rev.*, **92**, 1184 (1953).
- [Ho 52] R. J. HORSLEY, R. N. H. HASLAM e H. E. JOHNS.: *Can. Journ. Phys.*, **30**, 159 (1952).
- [Ho 53] B. G. HOGG e H. E. DUCKWORTH: *Can. Journ. Phys.*, **31**, 942 (1953).
- [J 55] S. A. E. JOHANSSON: *Phys. Rev.*, **97**, 434 (1955).
- [J 56] S. A. E. JOHANSSON: *Physica*, **22**, 1144 (1956).
- [J 57] S. A. E. JOHANSSON e B. FORKMAN: *Ark. f. Fys.*, **12**, 359 (1957).
- [J 58] S. A. E. JOHANSSON: *NBS Photonuclear Conference* 1958, Paper A10.
- [Jh 55] S. A. E. JOHANSSON: *Phys. Rev.*, **97**, 1186 (1955).
- [Jo 55] S. A. E. JOHANSSON e B. FORKMAN: *Phys. Rev.*, **99**, 1031 L (1955).
- [K 51] L. KATZ e A. G. W. CAMERON: *Phys. Rev.*, **84**, 1115 (1951).
- [K 52] P. F. A. KLINKENBERG: *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 63 (1952).
- [K 53] H. W. KOCK e R. S. FOOTE: *Phys. Rev.*, **91**, 455 (1953).
- [K 54] L. KATZ, R. N. H. HASLAM, R. J. HORSLEY, A. G. W. CAMERON e R. MONTALBETTI: *Phys. Rev.*, **95**, 464 (1954).
- [K 56] G. K. KLIGER, V. I. RIABINKIN, I. V. ČUVILO e V. G. ŠEVČENKO: *Physica*, **22**, 1142 A (1956).
- [K 57] A. P. KOMAR e I. P. YAVOR: *Žu. Eksper. Teor. Fiz.*, **32**, 614 (1957).
- [K 58] L. KATZ: *NBS Photonuclear Conference* 1958, Paper B8.
- [Ka 51] L. KATZ e A. S. PENFOLD: *Phys. Rev.*, **81**, 815 e **83**, 169 (1951).
- [Ka 53] L. KATZ, R. G. BAKER e R. MONTALBETTI: *Can. Journ. Phys.*, **31**, 250 (1953).
- [Ka 54] L. KATZ, R. N. H. HASLAM, J. GOLDENBERG e J. G. V. TAYLOR: *Can. Journ. Phys.*, **32**, 580 (1954).
- [Ka 56] L. KATZ, L. PEASE e H. MOODY: *Can. Journ. Phys.*, **34**, 476 (1956).
- [Kt 56] L. KATZ e A. G. W. CAMERON: *Can. Journ. Phys.*, **29**, 518 (1951).
- [L 51] C. W. LI, W. WHALING, W. A. FOWLER e C. C. LAURITSEN: *Phys. Rev.*, **83**, 512 (1951).
- [L 52] C. W. LI: *Phys. Rev.*, **88**, 1038 (1952).
- [L 55] A. M. LANE e C. F. WANDEL: *Phys. Rev.*, **98**, 1524 (1955).
- [L 56] L. E. LAZAREVA, A. N. POSPELOV e G. N. ZATZEPINA: *Physica*, **22**, 1148 A (1956).
- [L 57] S. L. LIVESEY: *Can. Journ. Phys.*, **35**, 987 (1957).
- [L 58] J. S. LEVINGER: *Congresso Internazionale di Fisica Nucleare* (Parigi, 7-12 Luglio 1958). «Introductory paper» alle reazioni fotonucleari.
- [Le 51] J. S. LEVINGER: *Phys. Rev.*, **84**, 43 (1951).
- [Le 56] E. LEJIKIN, R. OSOKINA e B. RATNER: *Suppl. Nuovo Cimento*, **3**, 105 (1956).
- [Li 55] S. L. LIVESEY: *Can. Journ. Phys.*, **33**, 391 (1955).
- [Li 56] S. L. LIVESEY: *Can. Journ. Phys.*, **34**, 1022 (1956).
- [M 44] A. MIGDAL: *Journ. Phys. USSR*, **8**, 331 (1944).
- [M 52] A. K. MANN, J. HALPERN e M. ROTHMAN: *Phys. Rev.*, **87**, 146 (1952).
- [M 53] R. MONTALBETTI, L. KATZ e I. GOLDEMBERG: *Phys. Rev.*, **91**, 465 (1953).
- [M 55] A. K. MANN, W. E. STEPHENS e D. H. WILKINSON: *Phys. Rev.*, **97**, 1184 (1955).
- [M 56] A. K. MANN e E. W. TITTERTON: *Proc. Phys. Soc.*, A **69**, 917 (1956).
- [M 57] C. MILONE, R. RICAMO e A. RUBBINO: *Nuovo Cimento*, **5**, 528 (1957).
- [M 58] R. MALVANO (gruppo di Torino e Catania): *NBS Photonuclear Conference* 1958, Paper B10.
- [Mi 57] C. MILONE e R. RICAMO: *Nuovo Cimento*, **5**, 1338 (1957).
- [Mi 58] C. MILONE, S. MILONE-TAMBURINO, R. RINZIVILLO, A. RUBBINO e C. TRIBUNO: *Nuovo Cimento*, **7**, 729 (1958).
- [Mo 53] R. MONTALBETTI e L. KATZ: *Can. Journ. Phys.*, **31**, 798 (1953).
- [Mo 55] H. MORINAGA: *Phys. Rev.*, **97**, 444 e 1184 (1955).

- [N 52] R. NATHANS e J. HALPERN: *Phys. Rev.*, **92**, 940 (1952).
- [N 55] R. NATHANS e P. F. YERGIN: *Phys. Rev.*, **98**, 1296 (1955).
- [O 56] R. M. OSOKINA e B. S. RATNER: *Physica*, **22**, 1147 A (1956).
- [O 58] T. R. OPHEL e I. F. WRIGHT: *Proc. Phys. Soc.*, **71**, 389 (1958).
- [Ok 56] K. OKAMOTO: *Progr. Theor. Phys.*, **15**, 75 (1956).
- [Ok 58] K. OKAMOTO: *Phys. Rev.*, **110**, 143 (1958).
- [Op 58] T. R. OPHEL: *Proc. Phys. Soc.*, **72**, 321 (1958).
- [P 50] G. A. PRICE e D. W. KERST: *Phys. Rev.*, **77**, 806 (1950).
- [P 52] A. PASKIN: *Phys. Rev.*, **87**, 197 (1952).
- [P 53] K. PHILLIPS: *Phil. Mag.*, **44**, 533 (1953).
- [P 54] G. A. PRICE: *Phys. Rev.*, **93**, 1279 (1954).
- [P 55] A. S. PENFOLD e B. M. SPICER: *Phys. Rev.*, **100**, 1377 (1955).
- [P 57] B. PETREE, M. WEISS e E. G. FULLER: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **II**, **2**, 16 (1957).
- [P 58] S. PENNER e J. E. LEISS: *NBS Photonuclear Conference 1958*, Paper B2.
- [Pa 54] J. E. PALMER: *M. Sc. Thesis* (Queen's University, Kingston, Ont., 1955).
- [Pe 52] D. C. PEASLEE: *Phys. Rev.*, **92**, 126 (1952).
- [Pe 54] A. S. PENFOLD e J. E. LEISS: *Phys. Rev.*, **95**, 637 (1954).
- [Pe 55] A. S. PENFOLD: *Proc. of the Photon Conf. at «Case Inst. of Technology»*, (Cleveland, Ohio, USA).
- [Ph 54] D. MCPHERSON, E. PEDERSON e L. KATZ: *Can. Journ. Phys.*, **32**, 593 (1954).
- [Po 50] H. L. POSS: *Phys. Rev.*, **79**, 539 (1950).
- [Pr 50] M. A. PRESTON: *Phys. Rev.*, **80**, 307 (1950).
- [Pr 58] D. G. PROCTOR e W. H. VOELKER: *NBS Photonuclear Conference 1958*, Paper E5 e *Bull. Am. Phys. Soc.*, **II**, **3**, 173 (1958).
- [R 56] J. M. REID, P. SWINBANK e J. R. ATKINSON: *Physica*, **22**, 1142 A (1956).
- [R 58] J. L. RHODES e W. E. STEPHENS: *NBS Photonuclear Conference 1958*, Paper E6 e *Bull. Am. Phys. Soc.*, **II**, **3**, 173 (1958).
- [S 46] L. I. SCHIFF: *Phys. Rev.*, **70**, 87 (1946).
- [S 50] H. STEINWEDEL, J. H. D. JENSEN e P. JENSEN: *Phys. Rev.*, **79**, 1019 (1950).
- [S 51] R. SHER, J. HALPERN e W. E. STEPHENS: *Phys. Rev.*, **81**, 154 (1951).
- [S 53] R. G. SUMMERS-GILL, R. N. H. HASLAM e L. KATZ: *Can. Journ. Phys.*, **31**, 70 (1953).
- [S 54] W. E. STEPHENS e A. K. MANN: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **29**, 26 (1954).
- [S 55] B. M. SPICER: *Phys. Rev.*, **99**, 33 (1955).
- [S 56] W. E. STEPHENS: *Physica*, **22**, 1143 A (1956).
- [S 57] B. M. SPICER, E. G. MUIRHEAD e G. G. SHUTE: *Austr. Journ. Phys.*, **10**, 217 (1957).
- [S 58] B. M. SPICER: *NBS Photonuclear Conference 1958*, Paper B1.
- [Sa 58] B. W. SARGENT e M. REVZEN: *NBS Photonuclear Conference 1958*, Paper B6.
- [Sc 56] C. SCHUHL: *Physica*, **22**, 1144 A (1956).
- [Se 55] W. E. STEPHENS e A. K. MANN: *Phys. Rev.*, **98**, 241 (1955).
- [Sp 54] B. M. SPICER, A. S. PENFOLD e J. GOLDBERG: *Phys. Rev.*, **95**, 629 (1954).
- [Sp 55] B. M. SPICER: *Phys. Rev.*, **100**, 791 (1955).
- [Sp 57] B. M. SPICER: *Austr. Journ. Phys.*, **10**, 326 (1957).
- [St 55] W. E. STEPHENS, A. K. MANN, B. J. PATTON e E. J. WINHOLD: *Phys. Rev.*, **96**, 839 (1955).
- [Sv 56] N. SVANTESSON: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **II**, **1**, 28 (1956).
- [T 50] M. E. TOMS, J. HALPERN e W. E. STEPHENS: *Phys. Rev.*, **77**, 753 (1950).
- [T 51] K. M. TERWILLIGER e L. W. JONES: *Phys. Rev.*, **82**, 820 (1951).
- [T 53] M. E. TOMS e W. E. STEPHENS: *Phys. Rev.*, **92**, 362 (1953).
- [T 54] M. E. TOMS, H. GERARD e W. E. STEPHENS: *Phys. Rev.*, **95**, 629 (1954).



- [T 55] M. E. TOMS e W. E. STEPHENS: *Phys. Rev.*, **98**, 626 (1955).  
[T 56] C. TZARA: *Journ. Phys. et Rad.*, **17**, 1001 (1956); *Physica*, **22**, 1149 A (1956);  
*Compt. Rend. Acad. Sci.*, **242**, 2340 (1956).  
[T 57] M. E. TOMS e W. E. STEPHENS: *Phys. Rev.*, **108**, 77 (1957).  
[Ta 54] J. G. V. TAYLOR, L. B. ROBINSON e R. N. H. HASLAM: *Can. Journ. Phys.*,  
**32**, 238 (1954).  
[Te 56] B. C. COOK e V. L. TELEGDI: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **II**, **1**, 63 (1956).  
[Ti 53] E. W. TITTERTON e T. A. BRINKLEY: *Proc. Phys. Soc.*, **A 66**, 194 e 579 (1953).  
[To 51] M. E. TOMS e W. E. STEPHENS: *Phys. Rev.*, **82**, 709 (1951).  
[To 54] M. E. TOMS e W. E. STEPHENS: *Phys. Rev.*, **95**, 1209 (1954).  
[To 56] R. TOBIN e J. McELHINNEY: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **1**, 340 (1956).  
[Y 56] P. F. YERGIN: *Phys. Rev.*, **104**, 1340 (1956).  
[W 51] L. WOLFESTEIN: *Phys. Rev.*, **82**, 690 (1951).  
[W 53] H. WÄFFLER: *Helv. Phys. Acta*, **26**, 785 (1953).  
[W 55] D. H. WILKINSON: *Proc. of the 1954 Glasgow Conf. on Nucl. and Meson Phys.*  
(London, 1955).  
[W 56] A. L. WHETSTONE, P. F. YERGIN e J. HALPERN: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **1**,  
192 (1956).  
[W 58] M. WOLFF, E. J. WINHOLD, W. E. STEPHENS e E. E. CARROL: *Bull. Am.*  
*Phys. Soc.*, **II**, **3**, 175 (1958).  
[Wa 55] A. H. WAPSTRA: *Physica*, **21**, 367 (1955).  
[Wi 51] D. H. WILKINSON e J. H. CARVER: *Phys. Rev.*, **83**, 466 (1951).  
[Wi 55] D. H. WILKINSON: *Phys. Rev.*, **99**, 1347 (1955).  
[Wi 56] D. H. WILKINSON: *Physica*, **22**, 1039 (1956).  
[Wr 56] I. F. WRIGHT, D. R. O. MORRISON, J. M. REID e J. R. ATKINSON: *Proc.*  
*Phys. Soc.*, **A 69**, 77 (1956).

---

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

---

---

Direttore responsabile: G. POLVANI

Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo del *Supplemento* è stato licenziato dai torchi il 13-IV-1959



